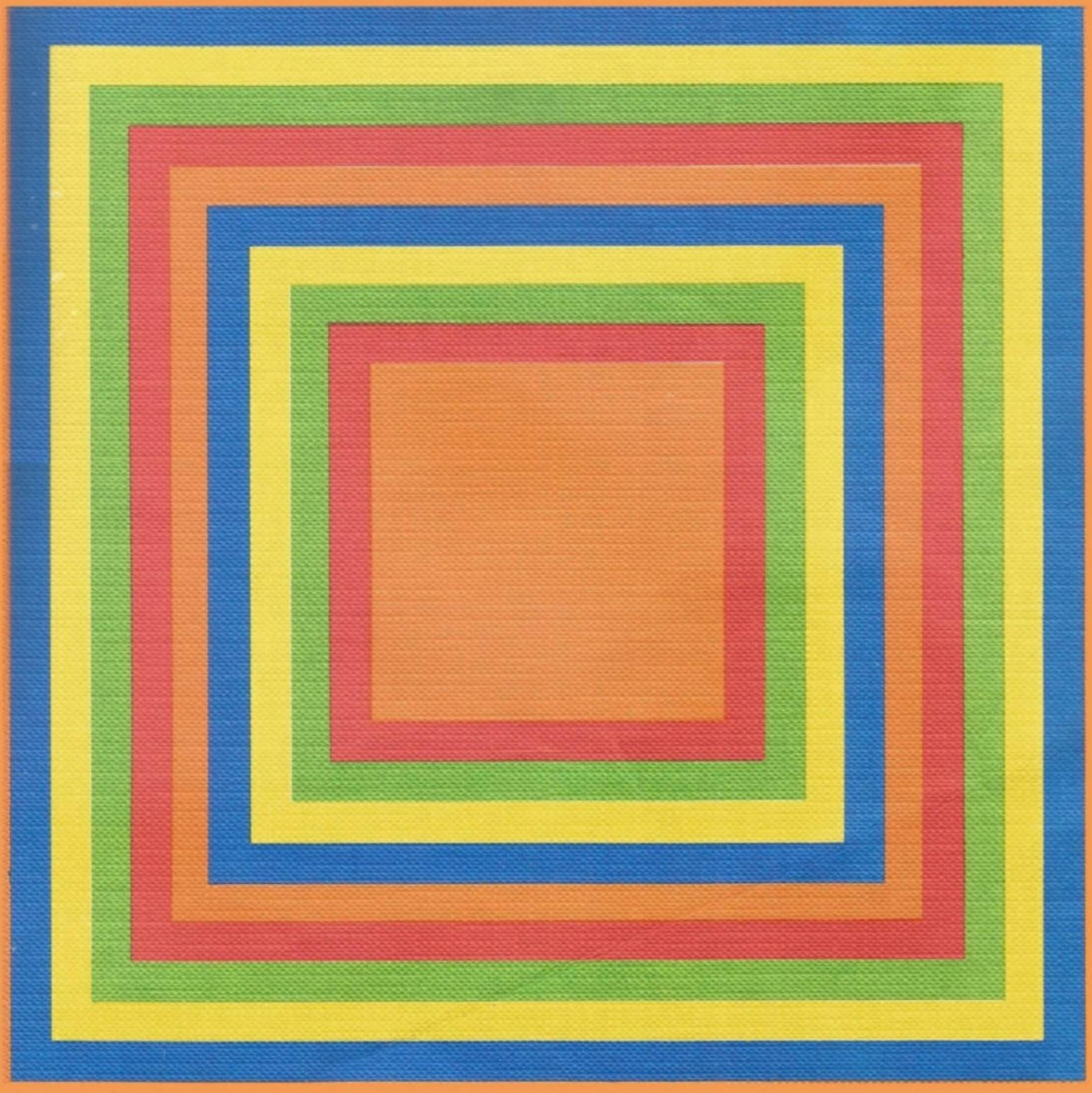
MATEMÁTICAS 6

EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA



santillana

Índice

TEMA 1

Aplicaciones 4

1. Producto cartesiano.
2. Representación del producto cartesiano.
3. Correspondencias. I.
4. Correspondencias. II.
5. Aplicaciones.
6. Clases de aplicaciones.

Actividades.

TEMA 2

Relaciones 12

1. Relación en un conjunto.
2. Propiedades que pueden tener las relaciones. I.
3. Propiedades que pueden tener las relaciones. II.
4. Propiedades que pueden tener las relaciones. III.
5. Relación de equivalencia. Elementos equivalentes.
6. Clases de equivalencia. Conjunto cociente.
7. Relación de orden.
8. Orden total y orden parcial.

Actividades.

TEMA 3

Multiplicación y división de números naturales 22

1. Multiplicación de números naturales.
2. Propiedades de la multiplicación de números naturales. Múltiplos.
3. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.
4. División exacta. Equivalencias fundamentales.
5. Divisiones enteras por defecto y por exceso.
6. Alteraciones del cociente y del resto en la división.
7. Propiedades de la división exacta.

Actividades.

TEMA 4

Potencias y raíz cuadrada 32

1. Potencias. I.
2. Potencias. II.
3. Operaciones con potencias. I.
4. Operaciones con potencias. II.
5. Raíz cuadrada exacta.
6. Raíz cuadrada entera.
7. Cálculo de la raíz cuadrada.

Actividades.

TEMA 5

Divisibilidad en $\mathbb{N}$ 40

1. Múltiplos y divisores.
2. Propiedades de los múltiplos.
3. Criterios de divisibilidad. I.
4. Criterios de divisibilidad. II.

Actividades.

TEMA 6

Divisibilidad. Números primos 46

1. Números primos.
2. Construcción de una tabla de números primos.
3. Modo de averiguar si un número es primo o compuesto.
4. Descomposición de un número en producto de factores primos.
5. Criterio de divisibilidad de números descompuestos en factores primos.
6. El conjunto de los divisores de un número.

Actividades.

TEMA 7

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo 54

1. Máximo común divisor de dos números. I.
2. Máximo común divisor de dos números. II.
3. Cálculo del máximo común divisor. I.
4. Cálculo del máximo común divisor. II.
5. Mínimo común múltiplo.
6. Cálculo del mínimo común múltiplo.

Actividades.

TEMA 8

Fracciones 62

1. Concepto de fracción.
2. La fracción como medida y como cociente.
3. Operadores. Cadena de operadores.
4. Las fracciones como operadores.

Actividades.

TEMA 9

Fracciones y números racionales 68

1. Fracciones equivalentes.
2. Obtención de fracciones equivalentes.
3. Fracción irreducible.
4. Simplificación de fracciones.
5. Reducción de fracciones a común denominador.
6. Comparación de fracciones.
7. El conjunto $\mathbb{Q}^+$ de los números racionales positivos.
8. Representación gráfica de fracciones y números racionales positivos.

Actividades.

TEMA 10

Adición y sustracción de números racionales 78

1. Representación de los números racionales en la recta numérica.
2. Suma de números racionales. I.
3. Suma de números racionales. II.
4. Propiedades de la suma de números racionales.
5. Resta de números racionales. I.

Actividades.

TEMA 11

Multiplicación y división de números racionales 88

1. Producto de fracciones.
2. Propiedades del producto de números racionales. I.
3. Propiedades del producto de números racionales. II.
4. Números racionales inversos.
5. División de números racionales.
6. Operaciones combinadas con fracciones.
7. Aplicación de las fracciones a la resolución de problemas.

Actividades.

TEMA 12

Adición y sustracción de números decimales 98

1. Fracciones decimales y números decimales. I.
2. Fracciones decimales y números decimales. II.
3. Fracciones decimales y números decimales. III.
4. Suma de números decimales.
5. Resta de números decimales.
6. Problemas con sumas y restas combinadas.

Actividades.

TEMA 13

Multiplicación y división con decimales 106

1. Cómo se multiplica con números decimales.
2. Cómo se divide con números decimales. I.
3. Cómo se divide con números decimales. II.
4. Potencia de un número racional. I.
5. Potencia de un número racional. II.

Actividades.

TEMA 14

Porcentajes, introducción a la proporcionalidad 114

1. Introducción a la proporcionalidad.
2. Porcentajes o tantos por ciento.
3. Porcentajes y proporcionalidad.
4. Problemas sobre porcentajes.

Actividades.

TEMA 15

Operaciones con segmentos 120

1. Recta en el plano.
2. Rectas secantes y rectas paralelas.
3. Trazado de rectas paralelas. Dirección y sentido.
4. Semirrectas y segmentos.
5. Igualdad y desigualdad de segmentos.
6. Operaciones con segmentos.

Actividades.

TEMA 16

Medidas de longitud. Unidades 128

1. Medida de segmentos.
2. Unidades de longitud.
3. Otras unidades de longitud.
4. Aproximación de medidas.
5. Orden de magnitud de un resultado.

Actividades.

TEMA 17

Operaciones con medidas de longitud 136

1. Complejos e incomplejos de longitud.
2. Suma y resta de medidas de longitud.
3. Multiplicación y división de medidas de longitud por un número natural.

Actividades.

TEMA 18

Ángulos: clases 142

1. Ángulo convexo y ángulo cóncavo.
2. Ángulo llano.
3. Igualdad y desigualdad de ángulos.
4. Operaciones con ángulos. Bisectriz.
5. Rectas perpendiculares. La escuadra.
6. Ángulos complementarios y ángulos suplementarios.
7. Traslación en el plano: Propiedades.
8. Ángulos de lados paralelos.
9. Ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una secante.
10. Ángulos de lados perpendiculares.

Actividades.

TEMA 19

Operaciones con medidas de ángulo 154

1. Medida de ángulos. Sistema sexagesimal.
2. Medidas de ángulos en forma compleja y en forma incompleja.
3. Operaciones con medidas de ángulos. I.
4. Operaciones con medidas de ángulos. II.
5. Operaciones con medidas de tiempo.

Actividades.

TEMA 20

Construcciones geométricas fundamentales 160

1. Simetría respecto de un eje. Eje de simetría de una figura.
2. Simetrías en la circunferencia.
3. Construcciones fundamentales con regla y compás. I.
4. Construcciones fundamentales con regla y compás. II.
5. Construcciones fundamentales con regla y compás. III.

Actividades.

TEMA 21

Polígonos. El triángulo 166

1. Polígonos cóncavos y polígonos convexos. Diagonales.
2. El triángulo. Relaciones entre sus lados y relaciones entre sus ángulos.
3. Construcción de triángulos. I.
4. Construcción de triángulos. II. Criterios de igualdad.
5. Cuadriláteros.
6. Lados opuestos de un paralelogramo.
7. Diagonales y ángulos de un paralelogramo.
8. Clasificación y simetría de los paralelogramos.
9. Construcción de polígonos regulares.

Actividades.

TEMA 22

Longitud de la circunferencia 176

1. Posiciones de una recta respecto de una circunferencia.
2. Posiciones relativas de dos circunferencias.
3. Longitud de la circunferencia. I.
4. Longitud de la circunferencia. II.

Actividades.

TEMA 23

Medidas de superficie 182

1. Medir superficies. Área de una figura. I.
2. Medir superficies. Área de una figura. II.
3. Unidades de superficie.
4. Complejos e incomplejos de superficie. I.
5. Complejos e incomplejos de superficie. II.

Actividades.

TEMA 24

Área de polígonos 190

1. Área del rectángulo: Fórmulas.
2. Área del cuadrado. Cálculo del lado.
3. Área del paralelogramo.
4. Área del triángulo.
5. Área del rombo.
6. Área del trapecio. Fórmula.
7. Áreas de polígonos regulares y de polígonos irregulares.

Actividades.

TEMA 25

Paralelismo y perpendicularidad en el espacio 200

1. Rectas y planos.
2. Posiciones de una recta y un plano.
3. Posiciones de rectas en el espacio.
4. Posiciones de dos planos en el espacio.
5. Rectas perpendiculares. Recta y plano perpendiculares.
6. Ángulo diedro. Rectilíneo de un diedro.
7. Planos perpendiculares: Propiedades.

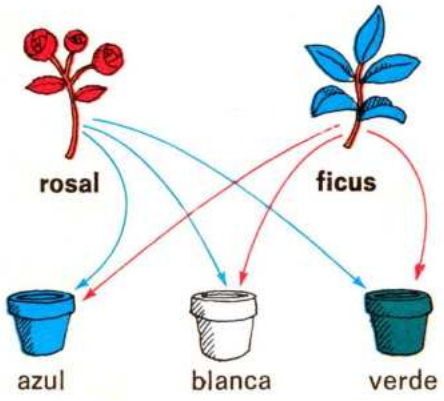
Actividades.

Cuadrados perfectos de los 200 primeros números naturales 208

TEMA 1 APLICACIONES

1. Producto cartesiano

Concepto de producto cartesiano de dos conjuntos.



PRODUCTO CARTESIANO

$P = \{r, f\}$

$M = \{a, b, v\}$

TABLA CARTESIANA

	M	
v	(r, v)	(f, v)
b	(r, b)	(f, b)
a	(r, a)	(f, a)
	r	f

P

Una señora tiene dos plantas: un rosal y un ficus, y tres macetas: una blanca, una azul y una verde.

¿De cuántas formas diferentes puede colocar las plantas en las macetas?

Observa las flechas. Cada flecha une una planta con una maceta. Hay tantas posibilidades o formas de colocar las plantas como flechas.

Si se designa cada planta y el color de cada maceta por la letra inicial de su nombre se tiene:

- Conjunto de plantas: $P = \{r, f\}$.
- Conjunto de macetas: $M = \{a, b, v\}$.

Para indicar que el rosal se coloca en la maceta blanca se puede escribir el par ordenado **(r, b)**.

Las distintas formas de colocar las plantas se pueden expresar con el siguiente conjunto de pares:

(r, a), (r, b), (r, v), (f, a), (f, b), (f, v)

Este conjunto de seis pares ordenados se llama **producto cartesiano** de **P** por **M** y se escribe:

$P \times M = \{(r, a), (r, b), (r, v), (f, a), (f, b), (f, v)\}$

Las plantas se pueden colocar de seis maneras.

Observa cómo se representa este producto en una tabla.

Se llama producto cartesiano de dos conjuntos A y B y se escribe $A \times B$ al conjunto formado por todos los pares ordenados posibles, de modo que en cada par ordenado el primer elemento pertenece a A y el segundo a B.

1. Resuelve el siguiente problema:

En un restaurante hay para elegir dos platos principales (paella y carne) y tres postres (naranja, flan y helado).

¿De cuántas formas se puede eligir la comida formada por un plato principal y un postre?

2. Considera los conjuntos $A = \{p, c\}$ y $B = \{n, f, h\}$.

a) Escribe el conjunto $A \times B$.

b) Representa el conjunto $A \times B$ en una tabla.

3. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{x, y, z\}$, calcula y contesta:

a) $A \times B$

b) $B \times A$

c) ¿Son iguales los pares ordenados de $A \times B$ y los de $B \times A$?

d) ¿Tiene el producto cartesiano la propiedad conmutativa?

2. Representación del producto cartesiano

Diversos tipos de diagramas.

TABLA CARTESIANA

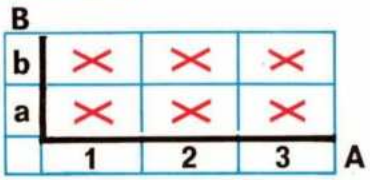


DIAGRAMA CARTESIANO

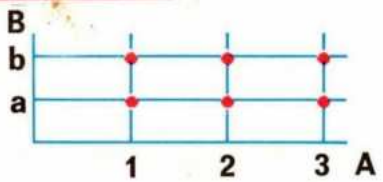


DIAGRAMA DE FLECHAS

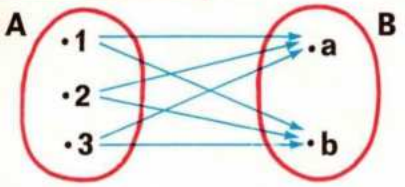
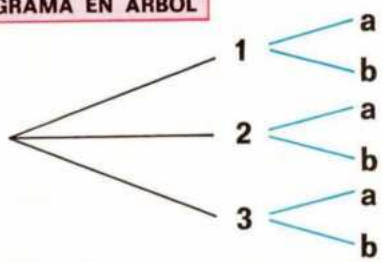


DIAGRAMA EN ÁRBOL



Consideremos el producto cartesiano **A** × **B** de los conjuntos **A** = {**1, 2, 3**} y **B** = {**a, b**}.

Este producto está formado por 6 pares ordenados, ya que el conjunto **A** tiene 3 elementos y el conjunto **B** tiene 2 elementos: $3 \times 2 = 6$.

A × **B** = {**(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)**}

El producto cartesiano se representa habitualmente de cuatro formas:

- En la **tabla cartesiana,** donde cada par ordenado viene representado por una cruz en una cuadrícula.
- En el **diagrama cartesiano**, donde cada par ordenado viene representado por un punto. La tabla cartesiana es una variedad del diagrama cartesiano.
- En el **diagrama de flechas**, donde cada par ordenado viene representado por una flecha.
- En el **diagrama en árbol**, donde cada par ordenado viene representado por un trazo.

El producto cartesiano de dos conjuntos se representa en tablas cartesianas, en diagramas cartesianos, en diagramas de flechas y en diagramas en árbol.

1. Sean los conjuntos A = {1, 3, 5} y B = {x, y}.

a) Escribe los elementos de **A** × **B**.

b) Representa **A** × **B** en diagramas de flechas, en diagramas cartesianos y en diagramas en árbol.

2. Con los números 3, 5, 7 ¿cuántos números de dos cifras se pueden escribir pudiendo repetirlos en el mismo número?

Haz el diagrama en árbol de **A** × **A** siendo **A** = {**3, 5, 7**}.

3. Resuelve:

Luisa quiere comprar una bicicleta. En la tienda las hay de cuatro colores: blancas, verdes, rojas y azules, y de tres tamaños: grandes, medianas y pequeñas. ¿Cuántas posibilidades tiene Luisa al elegir la bicicleta?

3. Correspondencias. I

Conjunto inicial, conjunto final y grafo.

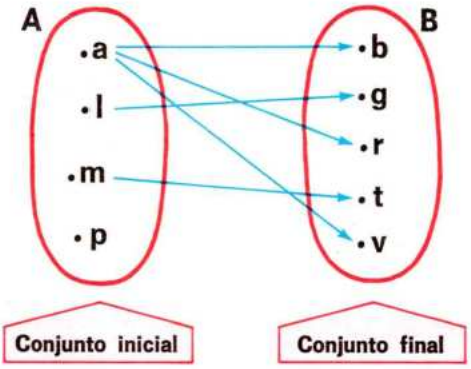
TABLA CARTESIANA

ciudades

	a	l	m	p
v	X			
t			X	
r	X			
g		X		
b	X			

alumnos

DIAGRAMA DE FLECHAS



Un grupo de alumnos: **Ana, Luis, María** y **Pedro,** desean representar en una tabla cartesiana las ciudades que han visitado en el verano.

Las ciudades fueron **Barcelona, Granada, Roma, Toledo** y **Valencia.**

Los niños acuerdan escribir las iniciales de sus nombres en la semirrecta azul, en la parte inferior de la tabla, y las iniciales de las ciudades en la semirrecta roja.

En esta tabla cartesiana se observa que:

- Ana visitó Barcelona, Roma y Valencia, y esto se indica por los pares **(a, b), (a, r), (a, v).**
- Luis visitó Granada, y esto se indica por el par **(l, g).**
- María visitó Toledo, y esto se indica por el par **(m, t).**
- Pedro no visitó ninguna ciudad.

Entre los conjuntos **A** = {**a, l, m, p**} y **B** = {**b, g, r, t, v**} se ha establecido una **correspondencia.**

- **A** se llama **conjunto inicial** o de **partida.**
- **B** se llama **conjunto final** o de **llegada.**
- El criterio de esta correspondencia es: «... visitó la ciudad...».

Observa los diagramas de flechas de la correspondencia.

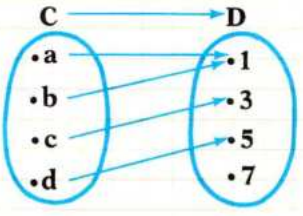
Cada flecha indica un par ordenado. El conjunto de todos los pares ordenados es el **grafo G** de la correspondencia:

G = {**(a, b), (a, r), (a, v), (l, g), (m, t)**}

Observa que el **grafo G** es un subconjunto de **A**×**B**.

Una correspondencia queda determinada cuando se conocen el conjunto inicial, el conjunto final y el grafo.

1. Observa el diagrama de flechas de esta correspondencia entre los conjuntos C y D.



a) Haz el diagrama cartesiano y escribe el conjunto de pares o grafo de esta correspondencia.

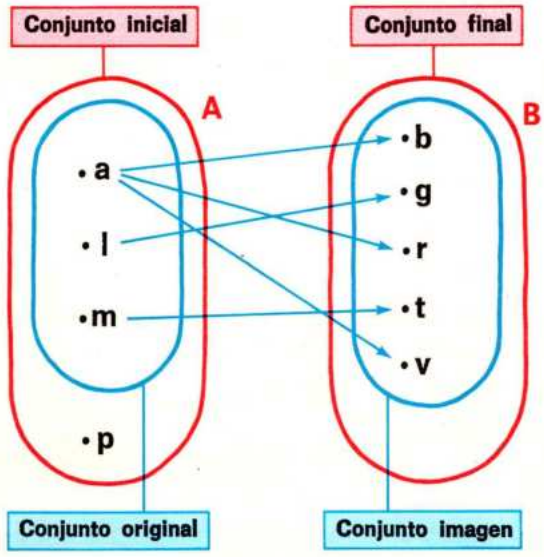
b) ¿Cuál es el conjunto inicial y cuál el conjunto final?

2. En una correspondencia el conjunto inicial es A = {1, 2, 3, 4}, el conjunto final es B = {x, y, z} y el grafo o conjunto de pares es G = {(1, x), (2, x), (3, y), (4, z)}.

Haz los diagramas de flechas y cartesiano de esta correspondencia.

4. Correspondencias. II

Conjunto original y conjunto imagen.



Conjunto original ⊂ **Conjunto inicial**
Conjunto imagen ⊂ **Conjunto final**

Observa de nuevo el diagrama de flechas de la correspondencia anterior entre el conjunto **A** de alumnos y el conjunto **B** de ciudades.

Los elementos de **B** a los que llegan flechas se llaman **imágenes** o **elementos imágenes.**

Los elementos de **A** de los que salen flechas se llaman **elementos originales** o **antiimágenes.**

Por ejemplo:

- El elemento **a** de **A** tiene tres imágenes: **b, r, v.**
- El elemento **l** de **A** tiene una imagen, que es **g.**

¿Cuál es la imagen del elemento **m** de **A**?

También se dice:

- El original o antiimagen de **b** es **a.**
- El original o antiimagen de **r** y **v** también es **a.**
- El original o antiimagen de **g** es **l.**

¿Cuál es el original o antiimagen de **t**?

El conjunto de los elementos de **A** que tienen imagen es {**a, l, m**} y se llama **conjunto original.**

El conjunto de los elementos de **B** que tienen original o antiimagen es {**b, g, r, t, v**} y se llama **conjunto imagen.**

En general, el conjunto original es un subconjunto del conjunto inicial y el conjunto imagen es un subconjunto del conjunto final.

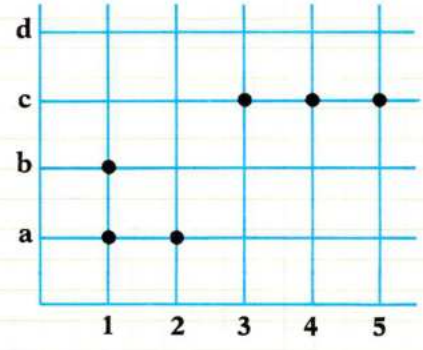
En una correspondencia de A en B el conjunto original está formado por los elementos de A que tienen imagen en B y el conjunto imagen está formado por los elementos de B que tienen original o antiimagen en A.

1. Considera la correspondencia de $A = \{3, 4, 5, 9\}$ en $B = \{6, 8, 10, 14\}$ definida por el criterio «... tiene por doble...».

Haz los diagramas de flechas y cartesiano de esta correspondencia.

¿Cuál es el conjunto original? ¿Y el conjunto imagen?

2. Observa el diagrama cartesiano de una correspondencia de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en $B = \{a, b, c, d\}$.



Halla:

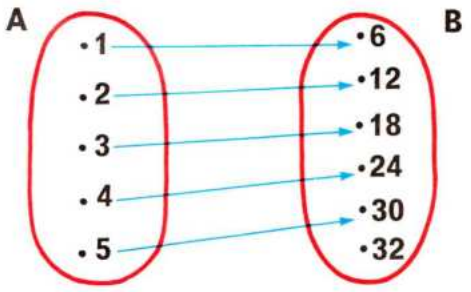
a) El conjunto original.

b) El conjunto imagen.

c) El grafo de la correspondencia.

5. Aplicaciones

APLICACIÓN DE A EN B



APLICACIÓN $A \xrightarrow{f} B$

$x \longrightarrow 6 \cdot x$

$f(x) = 6x$

$f(1) = 6$

$f(2) = 12$

Aplicación de un conjunto en otro.

Consideremos la correspondencia de **A** = {**1, 2, 3, 4, 5**} en **B** = {**6, 12, 18, 24, 30, 32**}, definida por el criterio «Multiplicar por 6».

En el diagrama de flechas se observa:

- Que todos los elementos del conjunto inicial son originales o antiimágenes, es decir:
  conjunto original = conjunto inicial = **A**
- Que cada elemento de **A** tiene una sola imagen.

Por eso se dice que esta correspondencia es una **aplicación.**

Las aplicaciones se designan con las letras **f, g, h,** ... Así, si llamamos **f** a esta aplicación de **A** en **B**, se escribe $A \xrightarrow{f} B$.

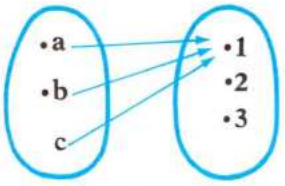
Si **x** es un elemento original, **f(x)** representa la imagen de **x**.

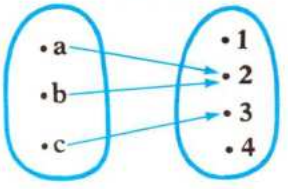
Para expresar que la imagen de 1 por la aplicación **f** es 6 se escribe **f(1)** = 6.

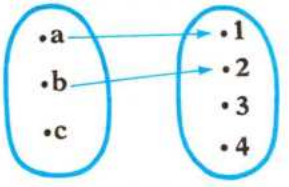
Del mismo modo, **f(2)** = 12; **f(3)** = 18, etc.

Una aplicación entre dos conjuntos es una correspondencia en la que el conjunto original coincide con el conjunto inicial y en la que cada elemento tiene una sola imagen.

1. Observa los diagramas de flechas de estas correspondencias e indica las que son aplicaciones:

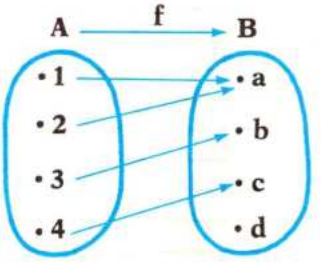






Escribe en cada caso el grafo o conjunto de pares.

2. Observa el diagrama de flechas de esta correspondencia f.



Completa:

f(1) = ...; **f(2)** = ...; **f(3)** = ...; **f(4)** = ...

- ¿Cuál es el conjunto original? ¿Coincide con el conjunto inicial?
- ¿Cuál es el conjunto imagen? ¿Coincide con el conjunto final?
- ¿Es **f** una aplicación?

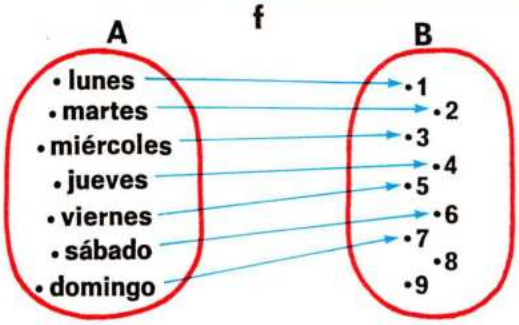
3. A cada número del conjunto A = {1, 2, 3, 4} se le asocia su doble en el conjunto B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

¿Es una aplicación esta correspondencia?

Escribe el conjunto original y el conjunto imagen y haz el diagrama de flechas.

6. Clases de aplicaciones

Aplicación inyectiva.



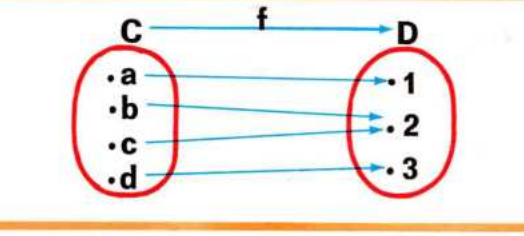
Observa el diagrama de flechas de una aplicación **f**.

Se observa que no hay ningún elemento de **B** que sea imagen de más de un elemento de **A**.

Se dice por ello que la aplicación **f** es **inyectiva.**

Una aplicación de A en B se dice que es inyectiva cuando todo elemento de B que es imagen de un elemento de A lo es de un solo elemento.

Aplicación exhaustiva o suprayectiva.

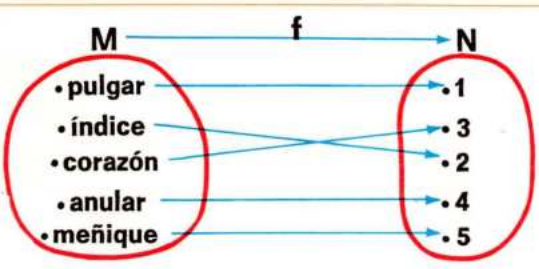


Observa el diagrama de flechas de una aplicación entre los conjuntos **C** y **D**.

En esta aplicación, el conjunto imagen {**1, 2, 3**} coincide con el conjunto final **D**. Por eso se dice que es una aplicación **exhaustiva** o **suprayectiva.**

Una aplicación se dice que es exhaustiva o suprayectiva cuando todos los elementos del conjunto final son elementos imágenes, es decir, cuando el conjunto imagen coincide con el conjunto final.

Aplicación biyectiva o biyección.



Observa el diagrama de flechas de una aplicación entre los conjuntos **M** y **N**.

- Esta aplicación es inyectiva porque cada elemento de **N** es imagen, a lo sumo, de un elemento de **M**.
- Esta aplicación también es suprayectiva porque el conjunto imagen coincide con el conjunto final.

Por eso se dice que es una aplicación biyectiva.

Una aplicación se dice que es biyectiva cuando es a la vez inyectiva y suprayectiva.

1. Contesta:

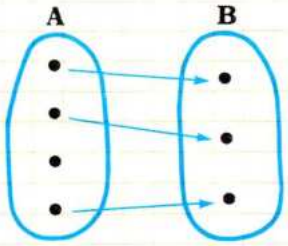
Si una aplicación $A \xrightarrow{f} B$ es suprayectiva ¿puede haber algún elemento que no tenga original o antiimagen?

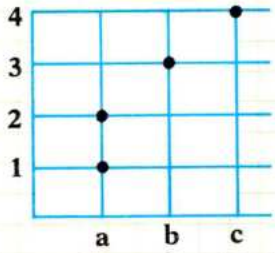
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

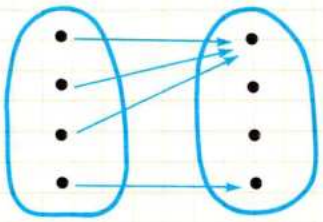
1. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{p, q, r, s\}$, representa en diagrama de flechas y en diagrama cartesiano la correspondencia de **A** en **B** dada por el conjunto de pares $\{(a, p), (a, q), (b, r), (b, s), (c, s)\}$.

¿Es aplicación esta correspondencia? ¿Por qué?

2. ¿Cuáles de los siguientes diagramas corresponden a aplicaciones?

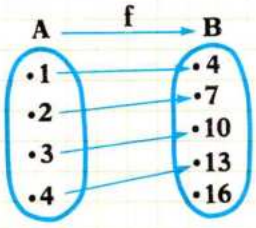






3. Observa este diagrama de flechas de una correspondencia **f** entre **A** y **B**.

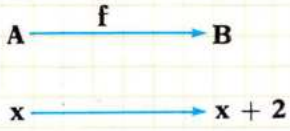
- ¿Es **f** una aplicación?
- Calcula **f**(1), **f**(2), **f**(3) y **f**(4).
- ¿Es **f** una aplicación inyectiva?
- ¿Es **f** una aplicación suprayectiva?



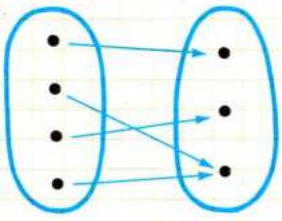
4. Sean los conjuntos $A = \{2, 3, 5, 10, 12, 33\}$ y $B = \{4, 5, 7, 12, 14, 35, 37\}$.

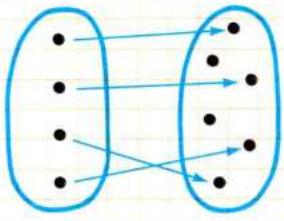
Se considera la aplicación de **A** en **B** en la que a cada elemento **x** de **A** se le asocia $x + 2$.

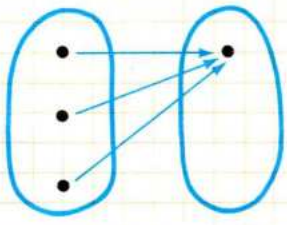
- Escribe **f**(2), **f**(3), **f**(5), **f**(10), **f**(12), **f**(33).
- Haz el diagrama de flechas de la aplicación **f**.
- ¿Qué tipo de aplicación es?



5. Observa los siguientes diagramas de aplicaciones. Indica después las que son aplicaciones inyectivas, las suprayectivas y las biyectivas.

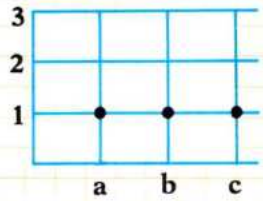






6. Observa el diagrama cartesiano de una aplicación de **A** en **B**.

- Halla **f(a)**, **f(b)** y **f(c)**.
- Haz el diagrama de flechas de esta aplicación.
- Escribe el grafo de la aplicación **f**.



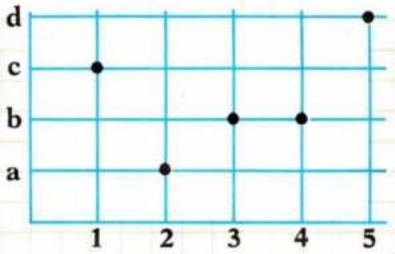
7. Haz los productos cartesianos $A \times A$ y $B \times A$ de los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$.

8. Representa en diagramas de flechas las aplicaciones posibles entre los conjuntos **A** y **B**: $\mathbf{A} = \{1, 2\}$; $\mathbf{B} = \{a, b\}$.

9. Representa la aplicación g: $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ con $\mathbf{A} = \{a, b, c, d\}$, $\mathbf{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ dada por el conjunto de pares $\{(a, 1), (b, 1), (c, 3), (d, 4)\}$. ¿Qué clase de aplicación es?

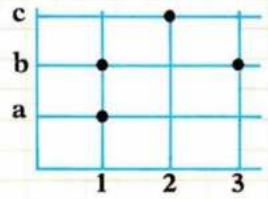
10. Sean los conjuntos $\mathbf{A} = \{a, b\}$ y $\mathbf{B} = \{1, 2, 3\}$. Haz el diagrama de todas las aplicaciones posibles entre **A** y **B**.

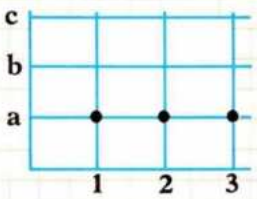
11. Éste es el diagrama cartesiano de una aplicación **f** de **A** en **B**.

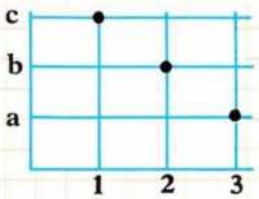


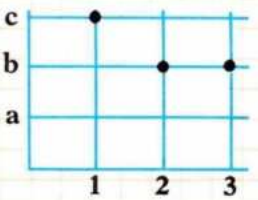
- Halla f(1), f(2), f(3), f(4) y f(5).
- ¿Es cada elemento de **B** imagen de un solo elemento de **A**?
- ¿Qué clase de aplicación es **f**?

12. De los siguientes diagramas ¿cuáles se refieren a aplicaciones? ¿Hay alguno que corresponda a una aplicación biyectiva o biyección.









PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. En un bar sirven bocadillos de jamón, de queso, de calamares y de chorizo, y refrescos de naranja, limón, piña y tomate.

¿De cuántas formas diferentes se puede merendar tomando un solo bocadillo y un solo refresco?

2. Una persona tiene cuatro camisas: blanca, azul, verde y roja, y tres pantalones: de pana, de franela y de punto.

¿De cuántas formas diferentes se puede vestir utilizando una camisa y un pantalón?

Haz un diagrama en árbol en el que se aclaren estas diferentes formas.

3. Una persona puede elegir para ir de Madrid a Valencia: el coche, el autocar y el avión; para ir de Valencia a Palma de Mallorca puede elegir el barco o el avión.

¿De cuántas maneras diferentes puede ir dicha persona de Madrid a Palma de Mallorca pasando por Valencia?

Haz un diagrama en árbol.

4. Un señor desea comprar un coche grande. Puede elegir entre cuatro marcas y de cada marca hay coches de cinco colores diferentes. ¿De cuántas formas diferentes puede elegir su coche?

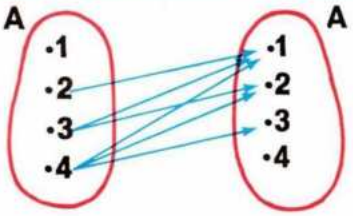
TEMA 2 ***RELACIONES***

1. Relación en un conjunto

La relación como una correspondencia.

CORRESPONDENCIA «... es mayor que...» DEL CONJUNTO A EN SÍ MISMO

①



Observa el diagrama de flechas ① de una correspondencia entre un conjunto **A** y él mismo.

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

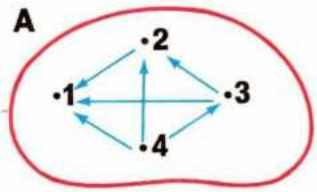
El conjunto inicial y el conjunto final son el mismo conjunto **A**.

El criterio de esta correspondencia es «...es mayor que...».

Una correspondencia como ésta de un conjunto **A** en sí mismo se llama **relación en el conjunto A.**

RELACIÓN «... es mayor que...» EN EL CONJUNTO A

②



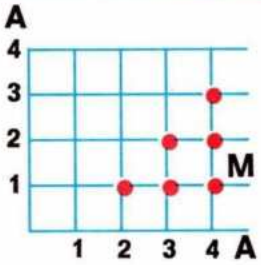
En este caso el diagrama de flechas se puede hacer representando una sola vez el conjunto **A** ② Pero en este diagrama de la relación debe haber tantas flechas como en el anterior.

Los pares de esta relación son:

$$\{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 1)\}$$

DIAGRAMA CARTESIANO DE LA RELACIÓN «... es mayor que...» EN EL CONJUNTO A

③



Observa que en el diagrama cartesiano ③ de esta relación formada por los puntos destacados en color rojo cada punto corresponde a un par ordenado de la relación. Así, el par **(4, 1)** está representado por el punto **M.**

Una relación en un conjunto A es una correspondencia del conjunto A en sí mismo.
O también: Una relación en un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$.

1. **En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se considera la relación definida por el criterio «... es menor que...».**
   a) Haz el diagrama de flechas de esta relación.
   b) Escribe el conjunto de pares ordenados de esta relación.
   c) Haz el diagrama cartesiano.

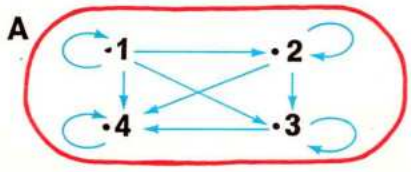
2. **En el conjunto de palabras $E = \{$timón, lima, carro, tiempo$\}$ se establece la relación dada por el criterio «... tiene el mismo número de vocales que...».**
   Haz los diagramas de flechas y cartesiano de esta relación.

2. Propiedades que pueden tener las relaciones. I

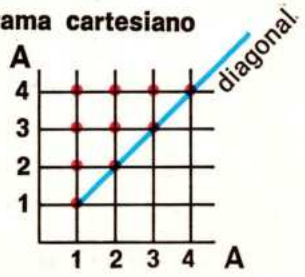
Propiedad reflexiva.

REPRESENTACIÓN DE LA RELACIÓN «... es menor o igual que...» EN EL CONJUNTO A

- En diagrama de flechas



- En diagrama cartesiano



PROPIEDAD REFLEXIVA

Todo elemento tiene un lazo

Consideremos el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, y en él la relación definida por el criterio «... es menor o igual...».

Los pares de $A \times A$, que pertenecen a esta relación, son tanto los que tienen iguales los dos elementos como los que tienen el primero menor que el segundo, es decir:

$$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

Observa los diagramas de flechas y cartesiano de esta relación.

En estos diagramas y en los pares de la relación se observa que todo elemento de **A** está relacionado con él mismo.

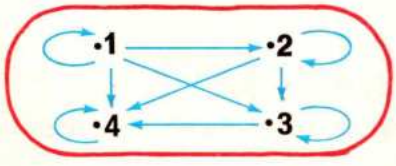
Por eso se dice que esta relación es **reflexiva** o que tiene la propiedad reflexiva.

Observa que en una relación reflexiva ocurre que:

- En su diagrama de flechas todos los elementos tienen un lazo.
- En su diagrama cartesiano todos los elementos de la diagonal están en la relación.

Una relación en un conjunto tiene la propiedad reflexiva cuando todo elemento está relacionado con él mismo.

Propiedad antisimétrica.



PROPIEDAD ANTISIMÉTRICA

No hay flechas de ida y vuelta

Consideremos de nuevo la relación en el conjunto **A** anterior.

Observa que el par **(1, 2)** está en la relación, pero no el par **(2, 1)**.

Del mismo modo, los pares **(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)** están en la relación, pero no los pares simétricos **(3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3).**

En general, si el par **(a, b)** está en la relación, siendo $a \neq b$, entonces el par **(b, a)** no está en la relación.

Por eso se dice que esta relación tiene la propiedad **antisimétrica.**

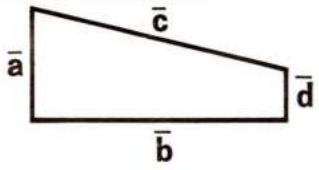
Observa que en el diagrama de flechas no hay ningún par de elementos unidos por dos flechas.

Una relación en un conjunto tiene la propiedad antisimétrica cuando dados dos elementos a y b distintos, si a está relacionado con b, nunca ocurre que b esté relacionado con a.

3. Propiedades que pueden tener las relaciones. II

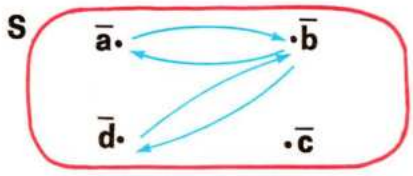
Propiedad simétrica.

REPRESENTACIÓN DE LA RELACIÓN «... es perpendicular a...» EN EL CONJUNTO S

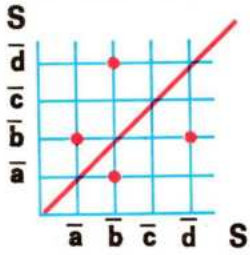


$S = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}$

- **En diagrama de flechas**



- **En diagrama cartesiano**



PROPIEDAD SIMÉTRICA

si

a ⟷ b

entonces

Sea el conjunto $S = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}$ de los segmentos dibujados en la figura.

Consideremos en el conjunto **S** la relación **R**: «... es perpendicular...».

En la figura se observa que:

- $\bar{a}$ es perpendicular a $\bar{b}$ y $\bar{b}$ es perpendicular a $\bar{a}$; por eso los pares $(\bar{a}, \bar{b})$ y $(\bar{b}, \bar{a})$ están en la relación.
- $\bar{d}$ es perpendicular a $\bar{b}$ y $\bar{b}$ es perpendicular a $\bar{d}$; por eso los pares $(\bar{d}, \bar{b})$ y $(\bar{b}, \bar{d})$ están en la relación.

Luego los pares que forman la relación son:

$$R = \{(\bar{a}, \bar{b}), (\bar{b}, \bar{a}), (\bar{b}, \bar{d}), (\bar{d}, \bar{b})\}$$

En este conjunto de pares se observa que siempre que un par, por ejemplo $(\bar{a}, \bar{b})$, está en la relación, también está el par simétrico $(\bar{b}, \bar{a})$.

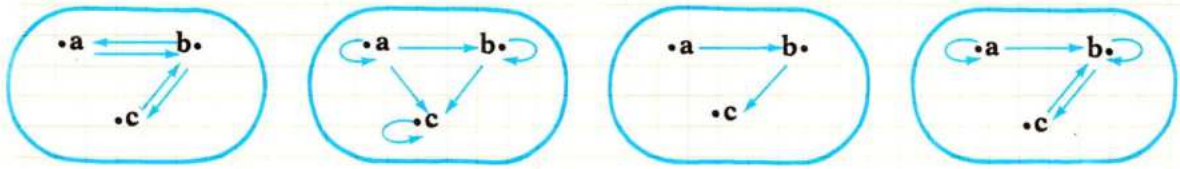
Es decir, si $\bar{a}$ está relacionado con $\bar{b}$, también $\bar{b}$ está relacionado con $\bar{a}$. Por esta razón se dice que la relación «... es perpendicular...» tiene la **propiedad simétrica**.

Observa en los diagramas de flechas y cartesiano que en una relación simétrica ocurre que:

- En su diagrama de flechas siempre que hay una flecha de ida hay otra flecha de vuelta.
- En su diagrama cartesiano, cada punto de la relación tiene su simétrico respecto de la diagonal.

Una relación R en un conjunto se dice que tiene la propiedad simétrica cuando dados dos elementos a y b distintos, siempre que a está relacionado con b resulta que también b está relacionado con a.

1. **Observa el diagrama de flechas de cuatro relaciones en el conjunto A = {a, b, c}:**

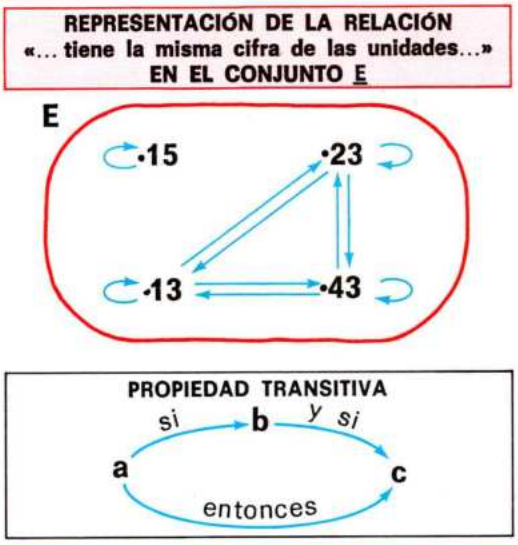


Indica cuál de estas relaciones es simétrica, cuál es antisimétrica, cuál es antisimétrica y reflexiva y cuál no es reflexiva, ni simétrica, ni antisimétrica.

2. **Haz el diagrama de flechas de una relación que tenga las propiedades reflexiva y simétrica en el conjunto A = {1, 2, 3}.**

4. Propiedades que pueden tener las relaciones. III

Propiedad transitiva.



Se considera la relación **R**, definida en el conjunto **E = {13, 15, 23, 43}** por el criterio «... tiene la misma cifra de las unidades ...».

Observa en el diagrama de flechas de esta relación que cada vez que hay dos flechas consecutivas

hay una tercera flecha que une el origen de la primera con el extremo de la segunda

Se dice por esta razón que esta relación tiene la propiedad transitiva.

Una relación definida en un conjunto tiene la propiedad transitiva cuando dados tres elementos a, b y c distintos, siempre que a está relacionado con b y b está relacionado con c, entonces a está relacionado con c.

1. En el conjunto de los alumnos de este colegio se establecen las relaciones dadas por los siguientes criterios:

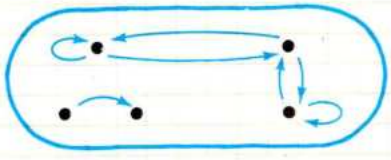
a) «Tener la misma altura».
b) «Tener más años que».
c) «Estar en el mismo curso».
d) «Ser primo de».

Indica las propiedades que tienen estas relaciones.

2. Una relación está definida en el conjunto A = {4, 5, 6} por el siguiente conjunto de pares: {(4, 4), (5, 5), (6, 6), (4, 5), (5, 6), (6, 5)}.

¿Qué propiedades tiene?

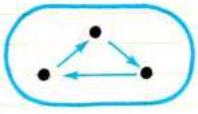
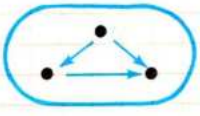
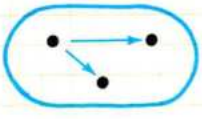
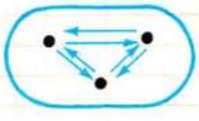
3. Observa este diagrama:



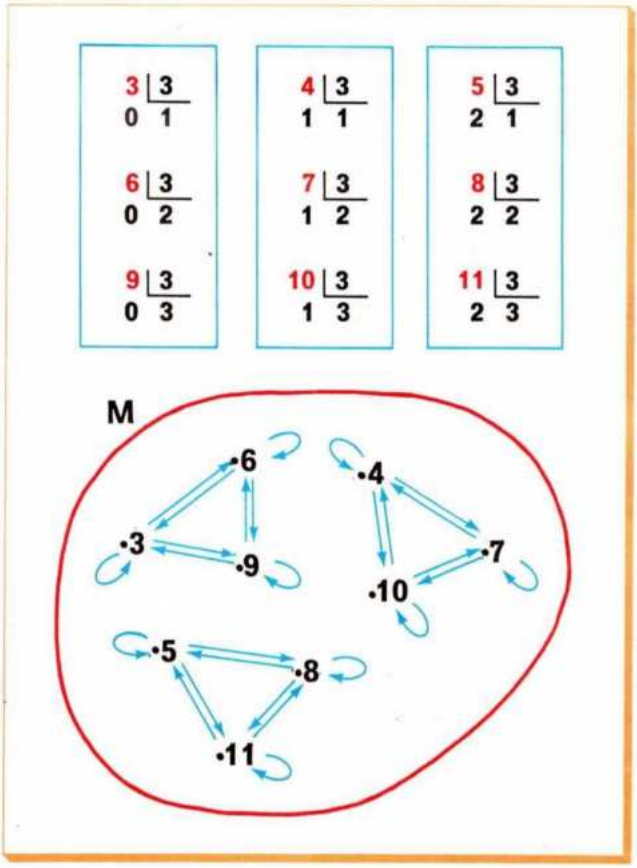
a) Faltan tres flechas para que sea el diagrama de una relación reflexiva. ¿Cuáles son?

b) Si además agregas otras tres flechas, tendrás el diagrama de una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

4. Observa las relaciones representadas en los siguientes diagramas e indica las que tienen la propiedad transitiva.

5. Relación de equivalencia. Elementos equivalentes



Relación de equivalencia.

Consideremos el conjunto **M** = {**3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11**} y en él la relación dada por el siguiente criterio: «Los números de **M** están relacionados si al dividirlos por 3 da el mismo resto.»

Observa las divisiones que dan el mismo resto:

- Los números 3, 6, 9 dan el mismo resto **(0)**, luego están relacionados.
- Los números 4, 7, 10 dan el mismo resto **(1)**, luego están relacionados.
- Los números 5, 8, 11 dan el mismo resto **(2)**, luego están relacionados.

Observa en el diagrama de flechas que esta relación:

- Tiene la propiedad **reflexiva** porque cada elemento lleva un lazo **a** .
- Tiene la propiedad **simétrica** porque siempre que hay una flecha de ida que une dos elementos (**a** → **b**) hay también una flecha de vuelta (**a** ⇄ **b**).
- Tiene la propiedad **transitiva** porque cada vez que hay dos flechas consecutivas, hay una tercera que une el origen de la primera con el extremo de la segunda.

a → **b** → **c**

Se dice por ello que esta relación es una **relación de equivalencia.**

Elementos equivalentes.

ELEMENTOS EQUIVALENTES

3	6	9
4	7	10
5	8	11

Los elementos de **M** que están relacionados entre sí se llaman **elementos equivalentes.**

Son elementos equivalentes según el criterio «... dividido por 3 da el mismo resto...» 3, 6, 9.

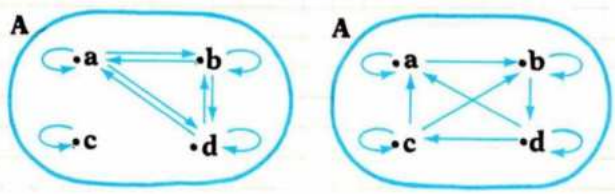
También son elementos equivalentes 4, 7, 10 y 5, 8, 11.

Una relación de equivalencia en un conjunto es una relación que tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Elementos equivalentes son los elementos que están relacionados entre sí.

1. Indica las propiedades que tienen cada una de las relaciones establecidas en el conjunto A, cuyos diagramas de flechas son como se ve en la figura.

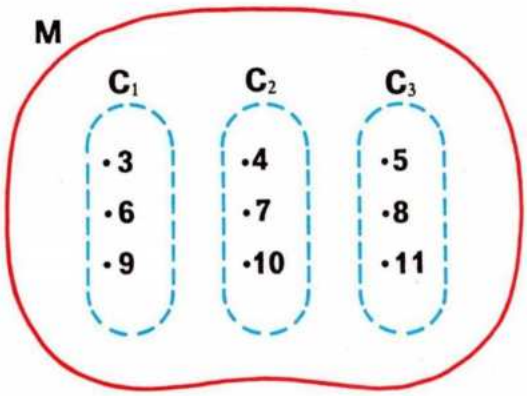
¿Es de equivalencia alguna de estas relaciones?



6. Clases de equivalencia. Conjunto cociente

Clases de equivalencia.

CLASES DE EQUIVALENCIA



Criterio: «Dan el mismo resto al dividir por 3».

Consideremos de nuevo la relación de equivalencia definida en el conjunto $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Los subconjuntos de **M** formados por los elementos que están relacionados entre sí (elementos equivalentes) se llaman **clases de equivalencia.**

Observa que en **M** hay tres clases de equivalencia:

$C_1 = \{3, 6, 9\}$ $C_2 = \{4, 7, 10\}$ $C_3 = \{5, 8, 11\}$

Observa que estas clases de equivalencia tienen las siguientes propiedades:

1.ª Todas las clases tienen algún elemento, es decir, ninguna clase es el conjunto vacío.

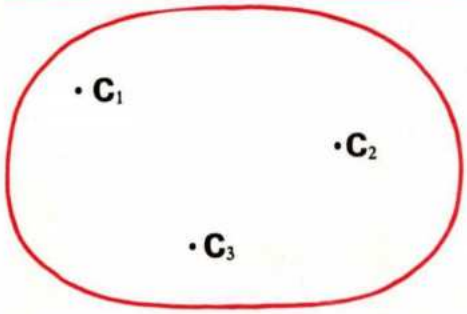
2.ª Las clases distintas son disjuntas, es decir, no tienen elementos comunes.

3.ª La unión de las clases de equivalencia es el conjunto de partida **M**.

Toda relación de equivalencia establecida en un conjunto determina en este conjunto una clasificación o partición en clases de equivalencia.

Conjunto cociente.

CONJUNTO COCIENTE $M/R = \{C_1, C_2, C_3\}$



Hemos visto que los elementos de

$$M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

han quedado clasificados en tres subconjuntos o clases de equivalencias C_1, C_2, C_3 por la relación **R**: «Dan el mismo resto al dividir por 3.»

Considera el conjunto cuyos elementos sean las clases de equivalencia $\{C_1, C_2, C_3\}$.

Este nuevo conjunto se llama **conjunto cociente** de **M** respecto de la relación **R** y se representa por **M/R**:

$$M/R = \{C_1, C_2, C_3\}$$

Conjunto cociente es el conjunto que tiene por elementos las clases de equivalencia.

1. **En el conjunto $P = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ se establece la relación dada por el criterio «Dar el mismo resto al dividir por 3».**

   a) Haz el diagrama de flechas de esta relación y escribe las clases de equivalencia.

   b) ¿Cuál es el conjunto cociente?

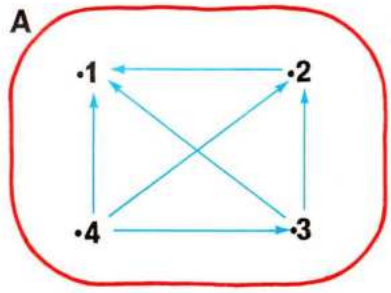
   c) ¿Hay algún elemento común en dos clases diferentes?

   d) Haz la unión de las clases equivalentes. ¿Qué conjunto resulta?

7. Relación de orden

Relación de orden estricto.

RELACIÓN DE ORDEN ESTRICTO EN A



En el conjunto **A** = {**1, 2, 3, 4**} se ha definido la relación «... es mayor que...».

Observa en el diagrama de flechas que:

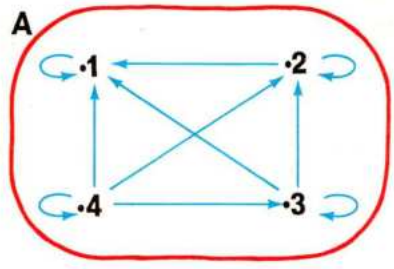
- Esta relación tiene la propiedad antisimétrica, ya que no hay flechas de ida y vuelta.
- Esta relación tiene la propiedad transitiva, pues por cada dos flechas consecutivas hay otra que une el origen de la primera con el extremo de la segunda.

Diremos que esta relación crea un orden y también que esta relación es una relación de **orden estricto.**

Una relación se dice que crea un orden o que es de orden estricto cuando sólo tiene las propiedades antisimétrica y transitiva.

Relación de orden.

RELACIÓN DE ORDEN ANTISIMÉTRICA, TRANSITIVA Y REFLEXIVA EN A



Consideremos nuevamente el conjunto **A** = {**1, 2, 3, 4**}, y en él la relación «es mayor o igual».

Compara el diagrama de flechas de esta relación con el diagrama de flechas anterior.

Se observa que en este diagrama los elementos tienen un **lazo**, lo que significa que esta relación, además de antisimétrica y transitiva, tiene la propiedad reflexiva.

La relación **R** establecida en el conjunto **A** se dice que es una **relación de orden**.

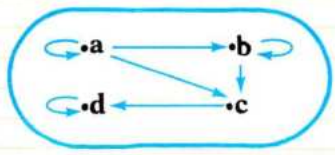
Una relación se dice que es una relación de orden cuando tiene las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

1. Considera el conjunto F de los familiares que viven en tu casa.

a) Establece en **F** la relación «... es más alto que...» y haz el diagrama de flechas de esta relación.

b) ¿Qué propiedades cumple? ¿Es una relación de orden estricto? ¿Es una relación de orden?

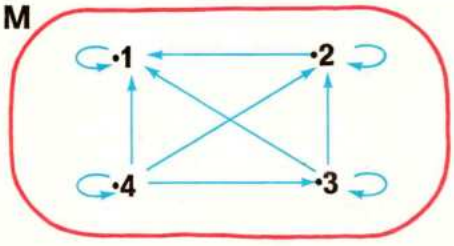
2. ¿Qué flechas hay que agregar para que el diagrama sea el de una relación de orden?



8. Orden total y orden parcial

Relación de orden total.

RELACIÓN DE ORDEN TOTAL



Todos los elementos están relacionados.

Observa de nuevo el diagrama de flechas de la relación «... es mayor o igual...» en el conjunto **M**.

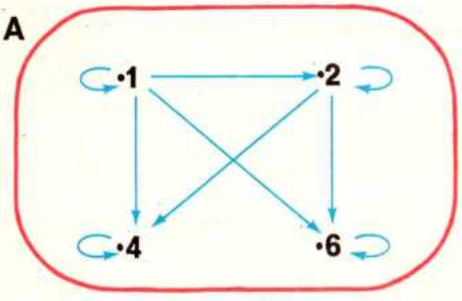
¿Hay algún par de elementos que no estén unidos por flechas?

Se observa que cualquier par de elementos de **M** están relacionados. Por eso, esta relación se llama **relación de orden total.**

Una relación de orden en un conjunto se dice que es de orden total cuando dos elementos distintos cualesquiera siempre están relacionados.

Relación de orden parcial.

RELACIÓN DE ORDEN PARCIAL



Hay elementos que no están relacionados.

Consideremos el conjunto **A** = {**1, 2, 4, 6**} y la relación «... divide a...».

- 1 divide a 1, porque la división 1 : 1 = 1 es exacta.
- 2 divide a 4, porque la división 4 : 2 = 2 es exacta.
- 2 divide a 6, porque la división 6 : 2 = 3 es exacta.

Observa el diagrama de flechas de esta relación.

Ésta es una relación de orden, puesto que tiene las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

¿Hay algún par de elementos que no estén unidos por flechas?

Se observa que los elementos 4 y 6 no están relacionados, porque 4 no divide a 6 ni divide a 4.

Por eso esta relación de orden se llama **relación de orden parcial.**

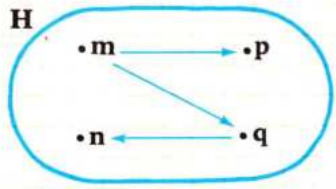
Una relación de orden en un conjunto se dice que es de orden parcial cuando dos elementos distintos no siempre están relacionados.

1. **Haz el diagrama de flechas de la relación «... divide a...» en el conjunto B = {2, 4, 6, 8}.**
   ¿Qué propiedades tiene esa relación en dicho conjunto?
   ¿Qué clase de relación es? ¿Es una relación de orden total? ¿Es una relación de orden parcial?

2. **Considera la relación «... es menor o igual...» en el conjunto A = {6, 8, 10, 12}.**
   Haz el diagrama de flechas de esta relación. ¿Es una relación de orden parcial? ¿Es una relación de orden total?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Observa el diagrama de flechas de una relación **R** en el conjunto **H.**



- Escribe el conjunto de pares de esta relación.
- ¿Hay tantos pares como flechas?
- ¿Hay algún elemento que esté relacionado con él mismo?
- Haz el diagrama cartesiano de la relación.
- ¿Es **R** reflexiva? ¿Es **R** antisimétrica?

2. Considera el conjunto de nombres **N = {Laura, Luis, Antonio, Pedro, Leandro}**, y en él la relación establecida por el criterio «... empieza con la misma letra que...».

- Dibuja el diagrama de flechas de esta relación.
- Escribe el conjunto de pares de esta relación.

3. En el conjunto de los alumnos de esta clase se establece la relación «... se sienta en la misma fila que...»

- ¿Es reflexiva esta relación? ¿Es simétrica? ¿Es transitiva?
- ¿Es una relación de equivalencia? ¿Qué elementos forman cada clase de equivalencia?

4. Considera la relación establecida en el conjunto **A = {x, y, z}** mediante el conjunto de pares **G = {(x, x), (x, y), (z, z), (y, z)}**.

¿Tiene la propiedad simétrica? Dibuja el diagrama de flechas y el diagrama cartesiano.

5. En el conjunto **M = {m, n, p, q}** se ha establecido una relación cuyos pares son **R = {(m, m), (m, n), (m, p), (m, q), (n, n), (n, p), (n, q), (p, p), (p, q), (q, q)}**.

¿Qué clase de relación es?

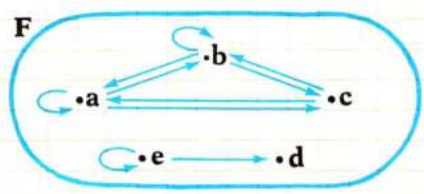
6. Sea el conjunto **P = {9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17}** y en él la relación de equivalencia «dar el mismo resto al dividir por tres».

- Haz el diagrama de flechas de esta relación.
- Escribe las clases de equivalencia.
- ¿Cuál es el conjunto cociente?

7. En el conjunto de números naturales **C = {14, 6, 16, 34, 2, 24}** se establece la relación «... acaba en la misma cifra que...».

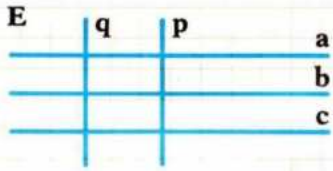
- Haz el diagrama de flechas y di qué propiedades tiene.
- ¿Es una relación de equivalencia?

8. Observa el diagrama de flechas en una relación en el conjunto **F = {a, b, c, d, e}**.



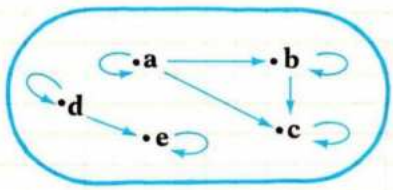
¿Cuál es el menor número de flechas que tienes que agregar para que sea el diagrama de una relación de equivalencia en **F**?

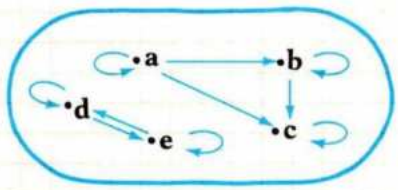
9. Observa el conjunto **E** de rectas de la figura $E = \{a, b, c, p, q\}$ y la relación «...es perpendicular...».



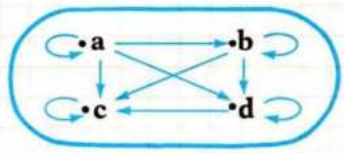
- ¿Es simétrica esta relación?
- ¿Es transitiva? ¿Es reflexiva?

10. Observa los diagramas siguientes. ¿Cuál de ellos corresponde a una relación de orden?





11. Escribe los pares de la relación cuyo diagrama de flechas es éste.



- ¿Es una relación de orden?
- ¿Es una relación de orden total?

12. En un conjunto **E** se ha establecido una relación de equivalencia que ha dado lugar a las siguientes clases de equivalencia:

$C_1 = \{m, n, p\}$, $C_2 = \{q\}$, $C_3 = \{r, s\}$

Haz el diagrama de flechas de esta relación en el conjunto **E**.

13. Haz los siguientes diagramas en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$:

a) De una relación reflexiva y antisimétrica.

b) De una relación reflexiva y simétrica, pero no transitiva.

c) De una relación de equivalencia.

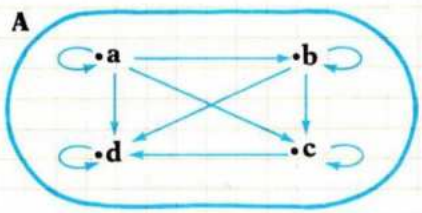
d) De una relación de orden estricto.

e) De una relación de orden total.

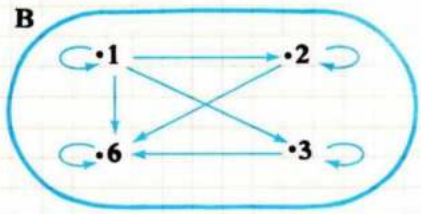
f) De una relación de orden parcial.

14. Observa las relaciones cuyos diagramas son los siguientes:

A



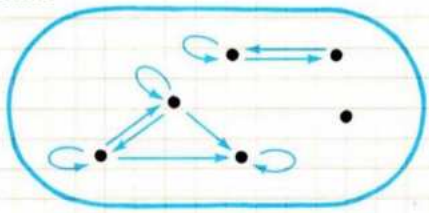
B



a) Escribe los pares de cada una de estas relaciones.

b) ¿Son relaciones de orden? ¿Es alguno de ellos de orden parcial?

15. Varios alumnos dejaron inacabado el diagrama de flechas de la relación «... tiene el mismo nombre que...» en un conjunto **A** de personas. Complétalo.



TEMA 3 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES

1. Multiplicación de números naturales

La suma de sumandos iguales y la multiplicación.

Una casa tiene 6 pisos y en cada piso hay 8 ventanas.

¿Cuántas ventanas tiene la casa?

El número de ventanas es 6 veces 8.

$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 6 \times 8 = \textbf{48 ventanas}$$

Una multiplicación se puede interpretar como una suma de sumandos iguales.

Los términos de la multiplicación se llaman **factores** y el resultado se llama **producto.**

Los signos de la multiplicación son una cruz en forma de aspa ($\times$) o un punto ($\cdot$).

Suma de sumandos iguales | **Multiplicación**

$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 6 \times 8$$

6×8 (Factores) $= 48$ (Producto)

La multiplicación y el producto cartesiano de dos conjuntos.

Para ir de la ciudad A a la ciudad B hay 4 caminos, y para ir de la ciudad B a la ciudad C hay 5 caminos.

¿Cuántos caminos diferentes puede elegir una persona para ir de A a C pasando por B?

Si para ir de **A** a **B** se toma el camino 1, entonces para ir de **A** a **C** hay cinco caminos posibles, que son los que se indican con los siguientes pares ordenados:

(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (1, e)

Si para ir de **A** a **B** se toma el camino 2, entonces para ir de **A** a **C** hay otros cinco caminos posibles:

(2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (2, e)

En total hay 4 × 5 = 20 caminos diferentes.

Observa que el producto cartesiano **A** $\times$ **B** tiene 20 pares ordenados.

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (1,a), (1,b), (1,c), (1,d), (1,e) \\ (2,a), (2,b), (2,c), (2,d), (2,e) \\ (3,a), (3,b), (3,c), (3,d), (3,e) \\ (4,a), (4,b), (4,c), (4,d), (4,e) \end{Bmatrix}$$

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 4 \times 5 = 20$$

La multiplicación se puede interpretar como una suma de sumandos iguales.
La multiplicación también se puede interpretar como el cardinal del producto cartesiano de dos conjuntos.

1. Calcula y contesta:

A. Haz la multiplicación 72×6. Multiplica cada factor por 5.
¿Por qué número queda multiplicado el producto?

B. Si $a \cdot b = 2.640$ ¿cuánto vale el producto $6 \cdot a \cdot b$?

2. Propiedades de la multiplicación de números naturales. Múltiplos

$9 \times 8 = 72 \qquad 8 \times 9 = 72$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Propiedad conmutativa.

El orden de los factores no altera el producto:

$5 \times 6 = 6 \times 5$ $\qquad$ $7 \times 8 = 8 \times 7$

En general, $a \cdot b = b \cdot a$.

$$(5 \times 7) \times 8 = 5 \times (7 \times 8)$$
$$35 \times 8 = 5 \times 56$$
$$280 = 280$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Propiedad asociativa.

Se pueden sustituir dos o más factores por su producto efectuado.

Para hacer el producto $5 \times 7 \times 8$ se puede hacer $(5 \times 7) \times 8$, o bien $5 \times (7 \times 8)$:

$$(5 \times 7) \times 8 = 5 \times (7 \times 8)$$

En general, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

$8 \times 1 = 1 \times 8 = 8$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Elemento neutro.

El elemento neutro de la multiplicación es el 1, porque todo número multiplicado por 1 da el mismo número:

$$5 \times 1 = 1 \times 5 = 5$$

En general, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

$5 \times 0 = 0 \times 5 = 0$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Elemento absorbente.

El elemento absorbente de la multiplicación es el 0, porque todo número multiplicado por 0 es 0.

$$6 \cdot 0 = 0 \cdot 6 = 0$$

En general, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

$5 \times 0 = 0 \qquad 5 \times 1 = 5 \qquad 5 \times 2 = 10$
$5 \times 3 = 15 \qquad 5 \times 4 = 20 \qquad 5 \times 5 = 25$

Múltiplos de un número.

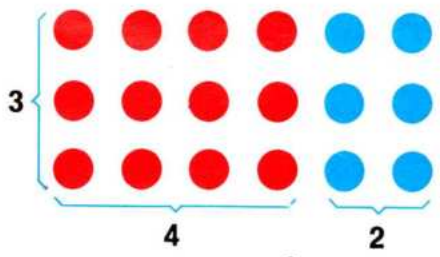
Si se multiplica por 5 cada uno de los números naturales se obtiene el conjunto de números 0, 5, 10, 15, 20, 25..., que se llama el **conjunto de los múltiplos de 5 o familia del 5.**

Un múltiplo de 6 es el producto de 6 por un número natural cualquiera. Así, 24 es múltiplo de 6 porque $24 = 6 \times 4$.

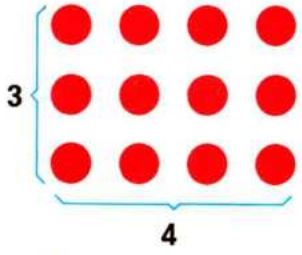
Un número natural a es múltiplo de otro b si a es igual al producto de b por un número natural n: $a = b \cdot n$.

3. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma

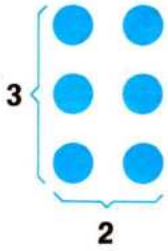
Transformación de sumas en productos y viceversa.



Número total de círculos: (4 + 2) × 3



Rojos: 4 × 3



Azules: 2 × 3

Observa los círculos rojos y los azules.

El número total de círculos se puede expresar de dos formas:

PRIMERA FORMA

- Número de columnas = 4 + 2.
- Número de filas = 3.
- Número total de puntos = **(4 + 2) × 3.**

SEGUNDA FORMA

- Número de círculos rojos = 4 × 3.
- Número de círculos azules = 2 × 3.
- Número total de círculos = **4 × 3 + 2 × 3.**

Observa que: **(4 + 2) × 3 = 4 × 3 + 2 × 3.**

Del mismo modo, si **a, b** y **c** son números naturales se tiene:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Ésta es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. También se verifica esta propiedad respecto de la resta:

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

La propiedad distributiva permite transformar un producto en una suma o en una diferencia: (a + b) · c = a · c + b · c, y también permite transformar una suma o diferencia en un producto: a · c + b · c = (a + b) · c.

1. Lee y resuelve:

Cuando se multiplica un número de una cifra por otro de varias, se aplica la propiedad distributiva: $4 \times 67 = 4 \times (60 + 7) = 4 \times 60 + 4 \times 7$.

Calcula de este modo estos productos:

a) 5 × 38 b) 6 × 34 c) 7 × 56 d) 8 × 24 e) 5 × 49

2. Calcula de dos formas estos productos:

a) 8 × 7 + 8 × 5 = ... b) 8 × (7 + 5) = 8 × 12 = ...

Comprueba que obtienes el mismo resultado.

3. Completa:

a · (5 + **b**) = ... 6 · (8 − **c**) = ... 7 · (3 + **c**) = ... 9 · (**a** + 2) = ...

Actividades

1. Transforma los productos siguientes en sumas o en restas:

a) $16 \times (3 + 14) = 16 \times 3 + 16 \times 14$
b) $(24 + 8) \times 12$
c) $19 \times (17 + 24)$
d) $24 \times (46 - 13)$
e) $15 \times (96 - 47)$
f) $34 \times (19 - 7)$

2. Cuando se aplica la propiedad distributiva en la forma $\mathbf{a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c}$ se dice que se ha sacado el factor común **c**.

Saca el factor común en cada caso:

a) $(50 \times 30) + (50 \times 7) = 50 \times (30 + 7) = 50 \times 37$
b) $(80 \times 30) + (80 \times 4) = \ldots$
c) $(6 \times 9) + (6 \times 10) = \ldots$
d) $(7 \times 5) + (7 \times 9) = \ldots$
e) $(15 \times 8) + (15 \times 12) = \ldots$
f) $(16 \times 5) + (16 \times 15) = \ldots$

3. Si **a**, **b** y **c** son números naturales, transforma las siguientes expresiones en sumas o en diferencias.

a) $(5 + \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$
b) $(\mathbf{a} + 6) \cdot \mathbf{b}$
c) $2 \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$
d) $3 \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$
e) $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$
f) $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - 3)$

4. Saca el factor común en las siguientes sumas y diferencias:

a) $3 \cdot \mathbf{a} + 3 \cdot \mathbf{b}$
b) $4 \cdot \mathbf{a} + 4 \cdot \mathbf{b}$
c) $8 \cdot \mathbf{a} - 8 \cdot \mathbf{c}$
d) $5 + 5 \cdot \mathbf{a} = 5 \cdot (1 + \mathbf{a})$
e) $6 + 6 \cdot \mathbf{a}$
f) $7 + 7 \cdot \mathbf{a}$

5. Cuando se puede calcular una expresión de varias formas, conviene elegir la más rápida.

Haz el cálculo de las siguientes expresiones por el método más rápido.

a) $17 \times 38 + 17 \times 12$
b) $96 \times 59 + 4 \times 59$
c) $148 \times 19 + 52 \times 19$

6. Dibuja una recta numérica y continúa señalando los múltiplos de 6 hasta 42:

Señala en otra recta numérica los múltiplos de 7 hasta 70.

7. Haz la descomposición de 12 en dos sumandos que sean números naturales de todas las formas posibles.

Para cada descomposición haz el producto de los sumandos.

¿Qué descomposición de 12 da el producto máximo?

$12 = 1 + 11 \longrightarrow 1 \times 11 = 11$
$12 = 2 + 10 \longrightarrow 2 \times 10 = 20$
$12 = 3 + \ldots \longrightarrow \ldots \times \ldots = \ldots$
$12 = 4 + \ldots \longrightarrow \ldots \times \ldots = \ldots$
$12 = 5 + \ldots \longrightarrow \ldots \times \ldots = \ldots$
$12 = 6 + \ldots \longrightarrow \ldots \times \ldots = \ldots$

8. En estas multiplicaciones está omitida la última cifra de uno de los factores.

Sin embargo, se puede decir que las multiplicaciones están mal hechas. ¿Por qué?

$37.42\square \times 5 = 146.197$
$724.30\square \times 2 = 144.869$

9. Se sabe que $7 \times 42 = 294$. Sin hacer la multiplicación, calcula 70×42.

4. División exacta. Equivalencias fundamentales

La división exacta.

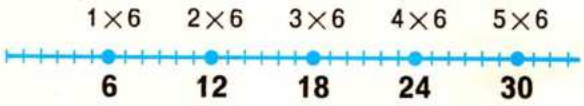
$6 \times \square = 24$

Factor desconocido

DIVISIÓN EXACTA

Dividendo **24** | **6**

4 ← Cociente exacto



Los puntos azules indican múltiplos de 6.

$\{\dot{6}\} = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, \ldots\}$

¿Cuál es el factor desconocido de esta multiplicación?

$$6 \cdot \square = 24$$

La división exacta es la operación que permite hallar el factor desconocido.

- El producto conocido **(24)** es el dividendo.
- El factor conocido **(6)** es el divisor.
- El factor desconocido ■ es el cociente exacto y se escribe $\square = 24 : 6 = 4$.

El cociente exacto **(4)** es el número que multiplicado por el divisor **(6)** nos da el dividendo **(24)**.

$$24 = 6 \times 4$$

Es decir, **dividendo = divisor × cociente.**

Las relaciones a) $24 : 6 = 4$ y b) $24 = 6 \cdot 4$ son equivalentes.

- La relación a) indica que la división 24 : 6 es exacta, es decir, que 24 es **divisible** por 6.
- La relación b) indica que 24 es **múltiplo** de 6.

Observa el conjunto de los múltiplos de 6.

Equivalencias fundamentales.

24 es divisible por 6 → **24 : 6**

es exacta

24 es múltiplo de 6 $\quad 24 = 6 \times 4$

En general, si **D** → dividiendo, **d** → divisor y **c** → cociente, las relaciones **D : d = c** y **D = d · c** son equivalentes.

- La relación **D : d = c** indica que **D** es divisible por **d.**
- La relación **D = d · c** indica que **D** es múltiplo de **d.**

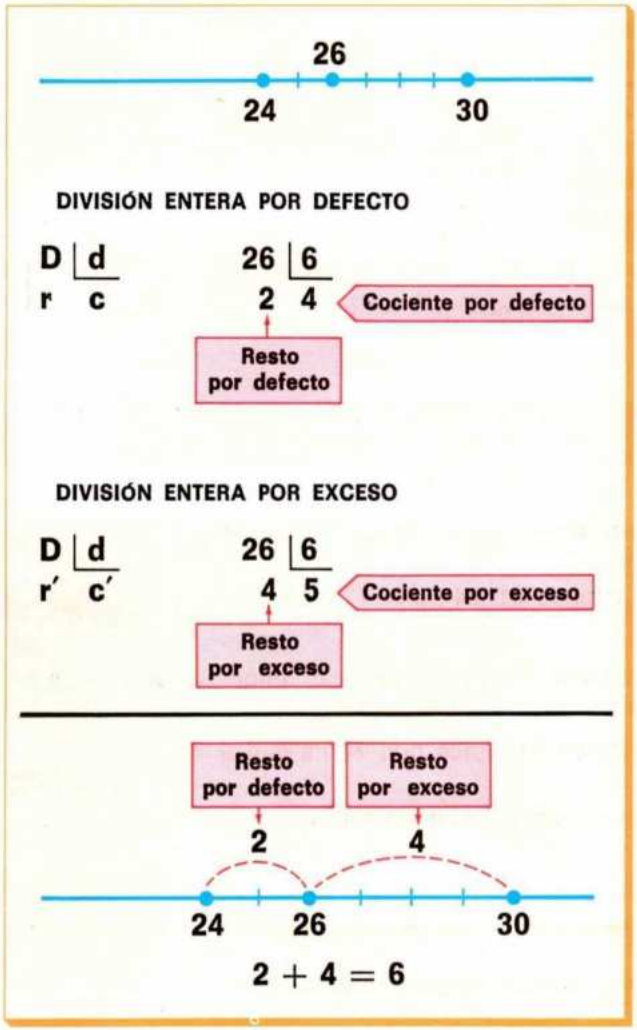
Las relaciones siguientes son equivalentes y se llaman las **equivalencias fundamentales de la división exacta.**

$$D = d \cdot c \rightarrow c = D : d \rightarrow d = D : c$$

La división exacta es la operación inversa de la multiplicación y permite encontrar el factor desconocido de una multiplicación de dos factores en la que se conocen el producto y otro factor.

En una división exacta, el dividendo es igual al divisor por el cociente: D = d · c. En una división exacta, se dice que el dividendo es divisible por el divisor y también que el dividendo es múltiplo del divisor.

5. Divisiones enteras por defecto y por exceso



Divisiones enteras por defecto y por exceso.

La división exacta entre dos números naturales no es siempre posible.

Así la división **26 : 6** no es exacta porque 26 no es múltiplo de 6, pero 26 está comprendido entre dos múltiplos consecutivos de 6: $24 < 26 < 30$, es decir, $4 \times 6 < 26 < 5 \times 6$.

Si se compara 26 con 24, se hace la división por defecto y se obtiene un cociente por defecto **(4)** y un resto por defecto **(2)**. Si se compara 26 con 30 se hace la división por exceso y se obtiene un cociente por exceso **(5)** y un resto por exceso **(4)**.

Observa las relaciones entre los términos de la división por defecto y por exceso.

División entera por defecto

$26 = 6 \times 4 + 2$

$D = d \times c + r$

División entera por exceso

$26 = 6 \times 5 - 4$

$D = d \times c' - r'$

Observa que en una división entera:

1.° El cociente por exceso es una unidad mayor que el cociente por defecto:

$5 = 4 + 1$ $\qquad$ $c' = c + 1$

2.° La suma del resto por defecto y el resto por exceso es igual al divisor:

$2 + 4 = 6$ $\qquad$ $r + r' = d$

3.° El resto es siempre menor que el divisor:

$2 < 6$ $\qquad$ $4 < 6$ $\qquad$ $r < d$ $\qquad$ $r' < d$

En la división entera por defecto, el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto, y el resto es menor que el divisor: $D = d \times c + r$ y $r < d$.

1. Escribe las divisiones exactas equivalentes a la multiplicación $9 \times 7 = 63$.

2. Calcula y responde:

a) (64 : 4) : 2 $\qquad$ b) 64 : (4 : 2) $\qquad$ c) (81 : 9) : 3 $\qquad$ d) 81 : (9 : 3)

¿Tiene la división la propiedad asociativa?

3. Contesta:

¿Es lo mismo 72 : 9 que 9 : 72? ¿Tiene la división la propiedad conmutativa?

4. Haz estas divisiones:

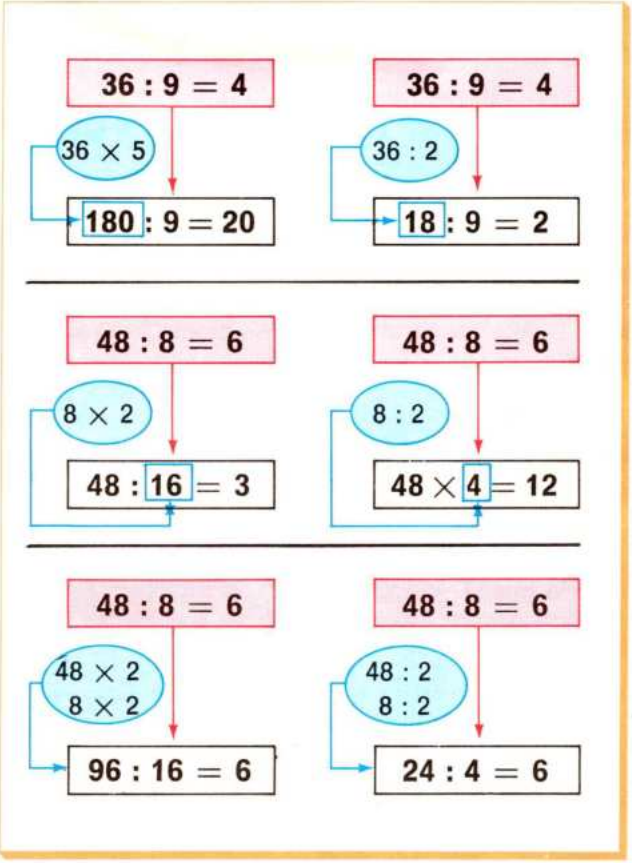
a) 6 : 3 $\qquad$ b) 0 : 3 $\qquad$ c) 8 : 4 $\qquad$ d) 15 : 3 $\qquad$ e) 36 : 9 $\qquad$ f) 3 : 0

La última no se puede hacer porque no hay ningún número que multiplicado por 0 dé 3.

Completa en tu cuaderno: «El divisor de una división puede ser un número natural cualquiera, excepto...»

6. Alteraciones del cociente y del resto en la división

Alteraciones del cociente en la división exacta.



Observa la división **36 : 9 = 4.**

- Cuando se multiplica el dividendo **(36)** por 5, el cociente **(4)** queda multiplicado por 5.
- Cuando se divide el dividendo **(36)** por 2, el cociente **(4)** queda dividido por 2.

Si el dividendo se multiplica o se divide por un número, el cociente queda multiplicado o dividido por dicho número.

Observa la división **48 : 8 = 6.**

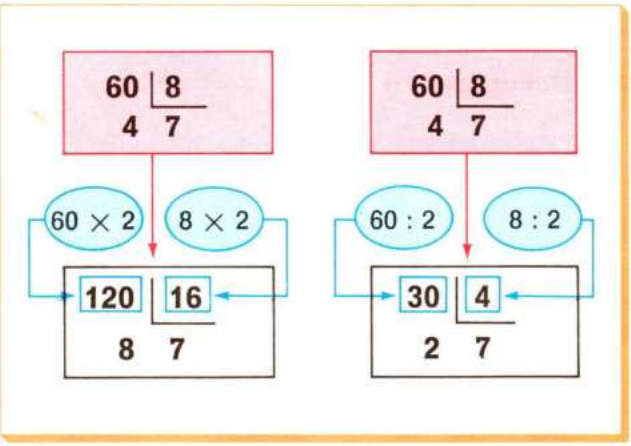
- Cuando se multiplica por 2 el divisor **(8)**, el cociente **(6)** queda dividido por 2.
- Cuando se divide por 2 el divisor **(8)**, el cociente **(6)** queda multiplicado por 2.

Si el divisor se multiplica o se divide por un número, el cociente queda dividido o multiplicado por dicho número.

Considera de nuevo la división **48 : 8 = 6.**
Si se multiplican el dividendo **(48)** por 2 y el divisor **(8)** por 2, el cociente **(6)** no varía.

Si se multiplican o dividen el dividendo y el divisor de una división exacta por el mismo número, el cociente no varía.

Alteraciones del cociente y del resto en la división entera.



Considera la división entera $\begin{array}{r|l} 60 & 8 \\ 4 & 7 \end{array}$

Cuando se multiplican el dividendo **(60)** y el divisor **(8)** por 2, el cociente **(7)** no varía, pero el resto **(4)** queda multiplicado por 2.

Cuando se dividen el dividendo **(60)** y el divisor **(8)** por 2, el cociente **(7)** no varía, pero el resto queda dividido por 2.

Si se multiplican o se dividen el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no varía, pero el resto queda multiplicado o dividido por ese número.

7. Propiedades de la división exacta

División de un producto por un número.

Consideremos la división **(324 × 32) : 9.**

Esta división se puede hacer de dos formas:

PRIMERA FORMA

1.° Se hace la multiplicación:

$$324 \times 32 = 10.368$$

2.° Se hace después la división:

$$10.368 : 9 = \mathbf{1.152}$$

SEGUNDA FORMA

1.° Se hace primero la división de uno de los factores:

$$324 : 9 = 36$$

2.° Se hace después la multiplicación por el otro factor:

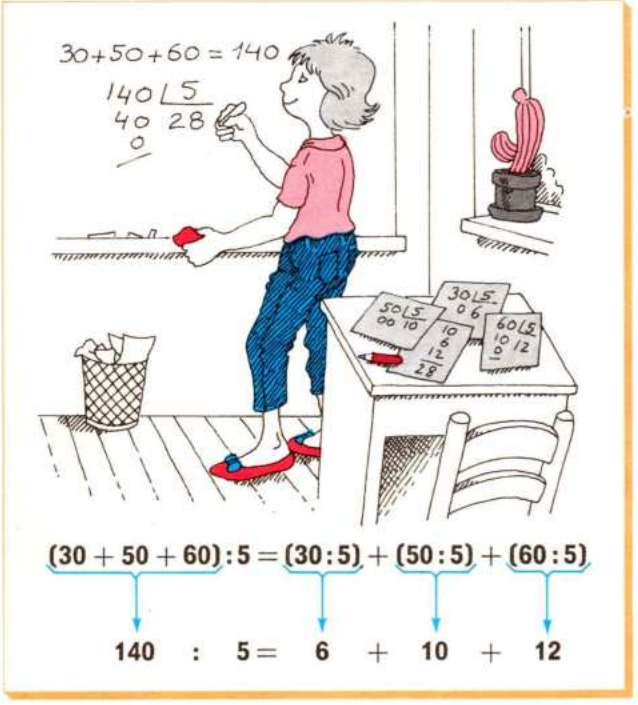
$$36 \times 32 = \mathbf{1.152}$$

En general, $\mathbf{(a \cdot n) : b = (a : b) \cdot n}$.

Casi siempre es más conveniente hacer primero la división y después, la multiplicación.

Para dividir un producto por un número se puede hacer dividiendo uno de los factores por dicho número y multiplicando el resultado por el otro factor.

Propiedad distributiva.



Observa dos formas de hacer la división

$$\mathbf{(30 + 50 + 60) : 5}$$

PRIMERA FORMA

1.° Se hace la suma: $30 + 50 + 60 = 140$.

2.° Se divide $140 : 5 = \mathbf{28}$.

SEGUNDA FORMA

1.° Se divide cada sumando por 5:

$(30 + 50 + 60) : 5 = (30 : 5) + (50 : 5) + (60 : 5)$

2.° Se suman los cocientes obtenidos: $6 + 10 + 12 = \mathbf{28}$.

En los dos casos se obtiene el mismo resultado: **28**.

En general, $\mathbf{(a + b + c) : n = (a : n) + (b : n) + (c : n)}$, suponiendo que todas las divisiones sean exactas.

Esta es la propiedad distributiva de la división exacta respecto de la suma.

Cuando se aplica la propiedad distributiva en la forma $\mathbf{(a : n) + (b : n) + (c : n) = (a + b + c) : n}$, se dice que se **ha sacado el divisor común n.**

1. Saca el divisor común de las siguientes expresiones:

a) $(8 : 4) + (12 : 4) + (20 : 4)$ b) $(10 : 5) + (20 : 5) + (40 : 5)$

2. Calcula:

a) $(12 : 6) + (18 : 6) + (24 : 6)$ b) $(15 : 3) + (21 : 3) + (48 : 3)$

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Multiplicación de un número por 5. Se halla la mitad del número y se agrega un cero.

Ejemplo: $24 \times 5 = (24 : 2) \times 10 = 12 \times 10 = 120$.

Calcula:

① 28×5 ② 26×5 ③ 42×5 ④ 64×5 ⑤ 36×5 ⑥ 82×5

2. Multiplicación de un número por 9. Se le agrega un cero al número y se resta dicho número.

Ejemplo: $14 \times 9 = 14 \times (10 - 1) = 140 - 14 = 126$.

Calcula:

① 13×9 ② 15×9 ③ 28×9 ④ 57×9 ⑤ 72×9 ⑥ 82×9

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Observa la división $450 \,\underline{|\,15.}$ $\;30$ Indica los cocientes de las siguientes divisiones sin hacerlas:

a) $450 \times 3 \,\underline{|\,15}$ c) $450 \times 3 \,\underline{|\,15 \times 3}$ e) $450 \,\underline{|\,15 : 3}$

b) $450 \,\underline{|\,15 \times 3}$ d) $450 : 3 \,\underline{|\,15}$ f) $450 : 3 \,\underline{|\,15 : 3}$

2. Considera el producto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Si multiplicamos **a** por 5 y **b** por 3 ¿por qué número queda multiplicado el producto?

3. Haz las siguientes divisiones enteras. Averigua después en cada una de ellas el menor número que hay que sumar al dividendo para que el cociente aumente en 1 unidad y sea una división exacta.

a) $70 \,\underline{|\,9}$ b) $40 \,\underline{|\,7}$ c) $38 \,\underline{|\,6}$ d) $48 \,\underline{|\,5}$

4. Efectúa las divisiones siguientes:

a) $3.052 : 28$ b) $17.613 : 309$ c) $4.598 : 56$ d) $41.130 : 90$ e) $7.896 : 57$

Comprueba en cada caso que $\mathbf{D} = \mathbf{d} \times \mathbf{c} + \mathbf{r}$ y que $\mathbf{r} < \mathbf{d}$.

5. En una división, el divisor es 57, el cociente es 58 y el resto es 19. ¿Cuál es el dividendo?

6. Si se designa por **n** un número natural cualquiera ¿qué representa $2 \cdot \mathbf{n}$, un número par o un número impar? ¿Y $2 \cdot \mathbf{n} + 1$?

7. ¿Cuál es el número cuya sexta parte es 84?

8. Si hoy es miércoles, di qué día de la semana será:

a) dentro de 10 días b) dentro de 50 días c) dentro de 100 días

9. Un amigo te dice que ha dividido un número por 7 y que ha obtenido 9 de cociente y 17 de resto. Justifica que tu amigo ha hecho mal la división y di cuáles deben ser el verdadero cociente, el verdadero resto y el dividendo.

JUEGO DE TELEVISIÓN

En un programa de televisión aparecía este juego:

Con 6 números dados, se efectúan sumas, restas, multiplicaciones y divisiones exactas utilizando varios de estos números o todos una sola vez. El resultado debía ser próximo o igual a un número fijado previamente.

Ejemplo: Con los números 1, 2, 7, 8, 10, 60 encontrar 858.

$$2 \cdot 60 \cdot 7 + 10 + 8 = 858$$

Completa:

Números dados	Número fijado	Expresión a calcular	Resultado encontrado
1, 2, 3, 4, 5, 6	127		
1, 2, 3, 6, 25, 100	2.521		
1, 2, 3, 4, 5, 20	207		

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. En un país nacen ocho niños por minuto.
   ¿Cuántos niños nacen por hora? ¿Cuántos nacen por año?

2. Una colección de fascículos consta de 130 números. El precio de los dos primeros juntos es de 150 ptas., y el precio de los restantes es de 175 ptas. cada uno.
   ¿Cuál es el importe de toda la colección? ¿Cuál sería el importe de toda la colección si cada veinte fascículos comprados regalasen uno?

3. Si una onza de oro vale 430 dólares y el dólar cuesta aproximadamente 133 ptas. ¿cuál es el valor en pesetas de una onza de oro? Si el dólar bajase a 115 ptas. ¿cuál sería el descenso en pesetas de una onza de oro?

4. En una urbanización viven 4.500 personas y hay un árbol por cada 90 habitantes.
   ¿Cuántos árboles hay en la urbanización? ¿Cuántos árboles habrá que plantar para tener un árbol por cada 12 habitantes?

5. Una bombona industrial de propano cuesta 2.084 ptas.
   a) Un pequeño taller consume 6 bombonas por semana. ¿Cuánto le cuesta al mes el propano consumido?
   b) Otro taller paga en un mes 25.008 ptas. por el propano consumido. ¿Cuántas bombonas utiliza?
   c) ¿Cuál será la factura a pagar mensualmente por cada taller si el precio de la bombona aumenta en 214 ptas.?

6. En España se consumen aproximadamente 33 kg de pescado por habitante y año. Averigua el número de habitantes de España y calcula la cantidad de pescado que se consume anualmente en España.
   ¿En cuántos kilogramos deberá aumentar el consumo español anual para que el índice fuese de 50 kg por habitante y año?

7. Una máquina automática de despacho de billetes admite monedas de 1, 5, 25 y 100 ptas. Calcula el número mínimo de monedas necesario para pagar 3.242 ptas., 1.587 ptas. y 4.287 ptas. Indica en cada caso el tipo de monedas utilizado.

TEMA 4 POTENCIAS Y RAÍZ CUADRADA

1. Potencias. I

Potencia de un número natural.

Observa los siguientes productos de números naturales:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\quad$ $3 \cdot 3$ $\quad$ $5 \cdot 5 \cdot 5$

Todos ellos tienen los factores iguales y se llaman **potencias.** Se escriben así:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ $\quad$ $3 \cdot 3 = 3^2$ $\quad$ $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$

En la potencia $2^4 = 16$ el factor que se repite (**2**) se llama **base** y el número de veces que se repite (**4**) se llama **exponente.**

Las potencias de **exponente 2** se llaman **cuadrados,** y las potencias de **exponente 3** se llaman **cubos.**

Observa cómo se leen estas potencias:

a^n → se lee **a elevado a n** o **a elevado a la potencia n.**

Exponente

Base $2^4 = 16$ Potencia

4^2 → cuatro elevado al cuadrado.

4^3 → cuatro elevado al cubo.

3^4 → tres elevado a cuatro o tres elevado a la potencia 4.

3^5 → tres elevado a cinco o tres elevado a la potencia 5.

Una potencia de exponente n de un número natural a es un producto de n factores iguales al número a: $a^n = a \cdot a \cdot a \overset{(n \text{ factores})}{\cdots\cdots} a$.

Cuadrados perfectos.

Las potencias de exponente 2 se llaman **cuadrados**, o también **cuadrados perfectos.**

Observa los cuadrados de los diez primeros números:

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrados perfectos	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

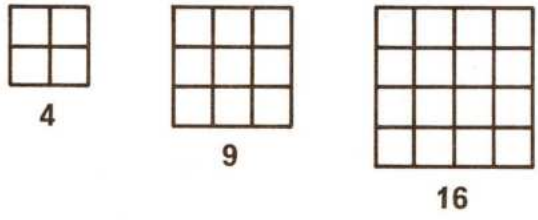
Conviene que sepas de memoria estos cuadrados perfectos.

Observa que siempre se puede construir un cuadrado que tenga el mismo número de unidades que un cuadrado perfecto; de este hecho se deriva su nombre.

Al final del libro aparece una tabla con los cuadrados perfectos de los 200 primeros números naturales.

CUADRADOS PERFECTOS DEL 1 AL 100

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100



4 $\quad$ 9 $\quad$ 16

$2^2 = 4$ $\quad$ $3^2 = 9$ $\quad$ $4^2 = 16$

1. Escribe en forma de potencia:

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\quad$ b) $16 \cdot 16 \cdot 16$ $\quad$ c) $10 \cdot 10$ $\quad$ d) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

2. Calcula las siguientes potencias:

a) 5^2; 5^3; 5^4 $\quad$ b) 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; 2^6 $\quad$ c) 3^2; 3^3; 3^4 $\quad$ d) 10^2; 10^3; 10^4

3. Calcula 5^2 y 2^5.

¿Se pueden intercambiar, en general, la base y el exponente de una potencia?

2. Potencias. II

Potencias de base 10.

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$

$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000$

Fíjate en estas potencias de base 10.

En todos los casos el resultado es la unidad seguida de ceros.

Cuenta los ceros y comprueba que en cada caso hay tantos ceros como indica el exponente.

Toda potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente.

Escritura de números utilizando potencias.

$150_{\text{¡}}000.000$ de km $= 15 \cdot 10^7$ km

1 km $= 10^6$ mm

Los números de muchas cifras que acaban en ceros tienen una escritura más cómoda utilizando potencias de 10.

Ejemplo: La distancia media de la Tierra al Sol es de ciento cincuenta millones de kilómetros. Se puede escribir así:

$150_{\text{¡}}000.000$ de km $= 15 \cdot 10_{\text{¡}}000.000 = 15 \cdot 10^7$

Otro ejemplo:

1 km $= 1.000$ m $= 1_{\text{¡}}000.000$ mm $= 10^6$ mm

Potencias de exponentes 1 y 0.

$4^1 = 4$ $\quad$ $12^1 = 12$

$4^0 = 1$ $\quad$ $12^0 = 1$

Las potencias a^1 y a^0 no tienen ningún significado porque no hay productos de un factor ni de cero factores. Pero se conviene en que $a^1 = a$ y $a^0 = 1$.

Un número elevado al exponente 1 es igual al mismo número.
Un número elevado al exponente 0 es igual a 1.

1. Escribe en forma de potencia:

a) 5.000 b) 60.000 c) 80.000 d) $12_{\text{¡}}000.000$

2. ¿Qué números son los siguientes?

a) $32 \cdot 10^2$ b) $16 \cdot 10^3$ c) $29 \cdot 10^5$ d) $72 \cdot 10^8$ e) $5 \cdot 10^2$

3. Expresa en milímetros las longitudes siguientes utilizando potencias de 10.

a) 2 mam $= 20.000$ m $= 20_{\text{¡}}000.000$ de mm $= 2 \cdot 10^7$ mm

b) 3 km c) 4 hm d) 6 dam

4. Escribe en forma de potencia:

a) doscientos millones b) tres billones c) cuatro trillones

3. Operaciones con potencias. I

Cómo se multiplican potencias de la misma base.

$5^4 \cdot 5^2 = 5^{4+2}$

$6^3 \cdot 6^2 = 6^{3+2}$

$8^2 \cdot 8^4 = 8^{2+4}$

$\boxed{a^m \cdot a^p = a^{m+p}}$

Vamos a multiplicar las potencias $5^4 \cdot 5^2$.

Para ello escribiremos cada potencia como producto:

$$5^4 \cdot 5^2 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{5^4} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{5^2} = 5^6$$

$$5^4 \cdot 5^2 = 5^{4+2} = 5^6$$

Se observa que resulta otra potencia con la misma base (5) y cuyo exponente (6) es igual a la suma de exponentes: $6 = 4 + 2$.

En general, $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$.

Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.

Cómo se dividen potencias de la misma base.

$9^6 : 9^2 = 9^{6-2}$

$6^5 : 6^3 = 6^{5-3}$

$8^7 : 8^3 = 8^{7-3}$

$\boxed{a^m : a^p = a^{m-p}}$

Observa el producto $9^4 \cdot 9^2 = 9^6$.

Recuerda que de un producto se pueden obtener dos divisiones:

$9^4 \cdot 9^2 = 9^6$ → $9^6 : 9^4 = 9^2$ y $9^6 : 9^2 = 9^4$

Observa que al dividir dos potencias de la misma base ($9^6 : 9^2 = 9^4$) la potencia que resulta (9^4) tiene la misma base (9), y el exponente (4) es la diferencia de los exponentes: $6 - 2 = 4$.

En general, $a^m : a^p = a^{m-p}$.

Para dividir potencias de la misma base, se deja la misma base y se restan los exponentes.

1. Escribe en forma de una sola potencia:

a) $2^4 \cdot 2^5$ b) $5^3 \cdot 5^4$ c) $2^6 \cdot 2^5 \cdot 2^4$ d) $3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^5$ e) $6^3 \cdot 6^1$

2. Escribe en forma de una sola potencia:

a) $6^5 : 6^2$ b) $\frac{6^8}{6^4}$ c) $a^7 : a^4$ d) $6^3 : 6^3$ e) $a^9 : a^4$

3. Calcula:

a) $5^4 \cdot 5$ b) $5^4 : 5^3$ c) $5^4 : 5^4$ d) $5^0 \cdot 5^2$ e) $5^1 \cdot 5^4$

4. Operaciones con potencias. II

Cómo se eleva una potencia a otra potencia.

$$(2^3)^4 = 2^{4\cdot 3} = 2^{12}$$

$$\boxed{(a^m)^p = a^{m\cdot p}}$$

Vamos a elevar a 4 la potencia 2^3.

$$(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{4\cdot 3} = 2^{12}$$

En general, $(a^m)^p = a^{m\cdot p}$.

Para elevar una potencia a otra potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

Cómo se multiplican potencias del mismo exponente.

$$2^3 \cdot 7^3 = (2 \cdot 7)^3$$

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$

$$\boxed{a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n}$$

Vamos a multiplicar potencias de distinta base y del mismo exponente. Por ejemplo: $2^3 \cdot 7^3$.

$$2^3 \cdot 7^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) =$$
$$= (2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 7), \text{ o sea: } (2 \cdot 7)^3$$

Por tanto, $2^3 \cdot 7^3 = (2 \cdot 7)^3$.

En general, $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Para multiplicar potencias del mismo exponente se multiplican las bases y se deja el mismo exponente.

Cómo se eleva un producto a una potencia.

$$(2 \cdot 7)^3 = 2^3 \cdot 7^3$$

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

$$\boxed{(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n}$$

Observa la potencia $(2 \cdot 7)^3$.

Por definición de potencia se tiene:

$$(2 \cdot 7)^3 = (2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 7) =$$
$$= (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 2^3 \cdot 7^3$$

En general, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Para elevar un producto a una potencia se eleva cada uno de los factores a dicha potencia.

1. **Escribe en forma de una sola potencia:**

   a) $(3^2)^3$ b) $(2^3)^2$ c) $(2^5)^4$ d) $(3^4)^2$ e) $(6^4)^3$ f) $(8^2)^6$

2. **Expresa en forma de una sola potencia:**

   a) $3^2 \cdot 5^2$ b) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3$ c) $2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^6$ d) $a^2 \cdot b^2$ e) $a^3 \cdot b^3$ f) $a^5 \cdot b^5 \cdot c^5$

3. **Expresa en forma de producto de varias potencias:**

   a) $(2 \cdot 3)^5$ b) $(2 \cdot 7 \cdot 5)^3$ c) $(a \cdot b)^2$ d) $(a \cdot b)^3$ e) $(a \cdot b \cdot c)^4$

5. Raíz cuadrada exacta

Raíz cuadrada de un cuadrado perfecto.

Números naturales		Se eleva al cuadrado		Cuadrados perfectos
1	→	1^2	=	1
2	→	2^2	=	4
3	→	3^2	=	9
4	→	4^2	=	16
5	→	5^2	=	25
6	→	6^2	=	36
7	→	7^2	=	49
8	→	8^2	=	64
9	→	9^2	=	81
10	→	10^2	=	100

$\sqrt{36} = 6$ ← Raíz cuadrada

Radicando

El número 25 es el cuadrado de 5; también se dice que 5 es la **raíz cuadrada** de 25.

El número 36 es el cuadrado del número 6. También se dice que 6 es la **raíz cuadrada** de 36.

Para indicar que 6 es la raíz cuadrada de 36 se escribe $\sqrt{36} = 6$.

- El signo $\sqrt{\ }$ se llama radical y es el **signo de la raíz cuadrada.**
- El número que se encuentra debajo del signo se llama **radicando**. En el ejemplo anterior el radicando es 36.

En general, si $\mathbf{b^2 = a}$, se dice que $\sqrt{\mathbf{a}} = \mathbf{b}$.

Un número natural b es la raíz cuadrada de otro número natural a si el número b elevado al cuadrado da el número a.

1. Indica en cada caso qué número es el radicando y qué número es la raíz cuadrada:

a) $\sqrt{4} = 2$ b) $\sqrt{9} = 3$ c) $\sqrt{16} = 4$ d) $\sqrt{25} = 5$

2. Lee y escribe:

La igualdad $\sqrt{4} = 2$ se lee «raíz cuadrada de 4 es igual a 2». Escribe cómo se leen las igualdades de la actividad 1.

3. Fíjate en el caso resuelto y completa en tu cuaderno los restantes:

a) $\sqrt{25} = 5$, porque $5^2 = 25$

b) $\sqrt{36} = \ldots$, porque $\ldots = \ldots$

c) $\sqrt{49} = \ldots$, porque $\ldots = \ldots$

d) $\sqrt{81} = \ldots$, porque $\ldots = \ldots$

e) $\sqrt{100} = \ldots$, porque $\ldots = \ldots$

4. Observa los ejemplos resueltos y completa en tu cuaderno los restantes:

a) $6^2 = 36 \rightarrow \sqrt{36} = 6$

b) $12^2 = 144 \rightarrow \sqrt{144} = 12$

c) $13^2 = \ldots \rightarrow \sqrt{\ } = \ldots$

d) $14^2 = \ldots \rightarrow \sqrt{\ } = \ldots$

5. Comprueba si son o no ciertas las siguientes igualdades:

a) $(4 + 3)^2 = 4^2 + 3^2$ b) $(5 - 3)^2 = 5^2 - 3^2$ c) $(5 \cdot 3)^2 = 5^2 \cdot 3^2$

6. Calcula de dos maneras:

a) $(2 \cdot 3)^2$ $(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$ $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

b) $(5 \cdot 2)^2$ c) $(7 \cdot 3)^2$ d) $(7 \cdot 2)^2$

6. Raíz cuadrada entera

81 es cuadrado perfecto

$9^2 = 81$

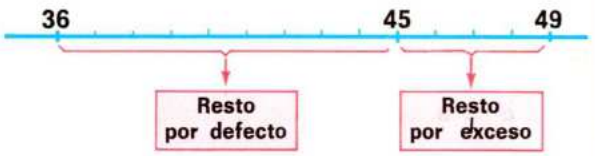
$\sqrt{81} = 9$

45 no es cuadrado perfecto

36 es cuadrado perfecto: $6^2 = 36$

49 es cuadrado perfecto: $7^2 = 49$

$$36 < 45 < 49$$



RAÍZ CUADRADA ENTERA POR DEFECTO

$\sqrt{45}$ | 6 ← Raíz por defecto
-36 |
9 ← Resto por defecto

RAÍZ CUADRADA ENTERA POR EXCESO

$\sqrt{45}$ | 7 ← Raíz por exceso
-49 |
4 ← Resto por exceso

Raíz cuadrada de un número natural.

Al tratar de hallar la raíz cuadrada de un número natural pueden ocurrir dos casos:

PRIMER CASO

Que el número natural sea cuadrado perfecto

Por ejemplo, sea el número **81**, que es cuadrado perfecto de 9.

Resulta que 81 tiene raíz cuadrada exacta: $\sqrt{81} = 9$.

SEGUNDO CASO

Que el número natural no sea cuadrado perfecto

En este caso, el número dado estará entre dos cuadrados perfectos consecutivos.

Por ejemplo, **45** no es cuadrado de ningún número natural, y por esta razón no tiene raíz cuadrada exacta.

Pero 45 está comprendido entre dos cuadrados perfectos: 36 y 49.

Según que comparemos 45 con 36 o con 49 se pueden hacer **dos raíces cuadradas enteras o inexactas:** la raíz cuadrada entera **por defecto** y la raíz cuadrada entera **por exceso.**

- El cuadrado perfecto inmediatamente inferior a 45 es 36.

  Esto significa que $\sqrt{36} = 6$.

  El número 6 se llama **raíz cuadrada por defecto de 45** y la diferencia $45 - 6^2 = 45 - 36 = 9$ se llama **resto por defecto.**

- El cuadrado perfecto inmediatamente superior a 45 es 49.

  Por ello $\sqrt{49} = 7$.

  El número 7 se llama **raíz cuadrada por exceso de 45** y la diferencia $7^2 - 45 = 49 - 45 = 4$ se llama **resto por exceso.**

Observa en la figura que la diferencia entre los dos cuadrados perfectos consecutivos, **49 − 36 = 13**, es igual a la suma del resto por defecto y del resto por exceso: **9 + 4 = 13.**

En la práctica se utiliza la raíz cuadrada entera por defecto.

1. Calcula las siguientes raíces cuadradas enteras:

a) $\sqrt{3}$ | 1
-1 |
2

b) $\sqrt{5}$ | 2
-4 |
1

c) $\sqrt{6}$ d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{10}$

f) $\sqrt{15}$ g) $\sqrt{18}$ h) $\sqrt{24}$

i) $\sqrt{38}$ j) $\sqrt{56}$ k) $\sqrt{69}$

l) $\sqrt{72}$ m) $\sqrt{84}$ n) $\sqrt{87}$

7. Cálculo de la raíz cuadrada

Cálculo de la raíz cuadrada con la tabla de cuadrados.

En la página 208 del libro se encuentra la tabla de cuadrados.

Si se desea encontrar la raíz cuadrada de un número, por ejemplo **1.216,** se observa en la tabla de cuadrados que este número se encuentra entre dos cuadrados perfectos consecutivos:

$34^2 = 1.156$ y $35^2 = 1.225$ $\qquad$ $1.156 < 1.216 < 1.225$

Por eso la raíz cuadrada entera por defecto de 1.216 es **34**, y el resto es **60**.

$\sqrt{1216}$	34
-1156	
60	

Regla para hallar la raíz cuadrada de un número

PRIMER PASO

$\sqrt{12.16}$

Se separan en el número, con un punto o una coma, de derecha a izquierda grupos de dos cifras.

El primer grupo de la izquierda puede tener una o dos cifras.

$\sqrt{12.16}$

SEGUNDO PASO

$\sqrt{12.16}$	3
$-\ 9$	
3	

Se halla la raíz cuadrada del grupo de la izquierda. El número natural cuyo cuadrado se acerca más a 12 es 3: $3^2 = 9$. Por tanto, la primera cifra de la raíz es 3, y se calcula la diferencia: $12 - 9 = 3$.

$\sqrt{12}$	3
$-\ 9$	
3	

TERCER PASO

$\sqrt{12.16}$	3
$-\ 9$	6
3 16	

A la derecha del resto (3) se baja el grupo siguiente de cifras (16), y debajo de la raíz hallada (3) se escribe el doble de la raíz (6).

$\sqrt{}$	3
	6
316	

CUARTO PASO

$\sqrt{12.16}$	3
$-\ 9$	65
3 16	

De 316 se separa la cifra de la derecha (6), y el número que queda a la izquierda (31) se divide entre 6, doble de la raíz hallada. El cociente (5) se pone a continuación de 6 y se forma el número 65.

31.6

31	6
1	5

QUINTO PASO

$\sqrt{12.16}$	3
$-\ 9$	$65 \times 5 = 325$
3 16	$64 \times 4 = 256$
$-\ 256$	
60	

El número 65 se multiplica por 5 y da 325. Como 325 es mayor que 316 no cabe a 5 y se escribe 4 en lugar de 5.

Como $64 \times 4 = 256$ y 256 es menor que 316, ya se puede pasar el 4 a la raíz. El resto es $316 - 256 = 60$.

$65 \times 5 = 325$

Como $325 > 316$ no vale 5

$64 \times 4 = 256$

Resto $= 316 - 256 = 60$

$\sqrt{12.16}$	34	
$-\ 9$	$65 \times \boxed{5} = 325$	no vale el 5
3 16	$64 \times \boxed{4} = 256$	vale el 4
$-\ 256$		
60		

En la práctica se hace así.

Actividades

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula:

① 10^1	⑤ 10^3	⑨ 10^5	⑬ $\sqrt{36}$	⑰ $\sqrt{64}$
② 10^7	⑥ 2^3	⑩ 2^5	⑭ $\sqrt{1}$	⑱ $\sqrt{9}$
③ 10^2	⑦ 10^4	⑪ 10^6	⑮ $\sqrt{49}$	⑲ $\sqrt{81}$
④ 2^2	⑧ 2^4	⑫ 3^1	⑯ $\sqrt{4}$	⑳ $\sqrt{16}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Una propiedad curiosa del número 24.

El número 24 es una unidad menor que el cuadrado perfecto 25:

$24 + 1 = 25 = 5^2$ $\quad$ $2 \times 24 + 1 = 49 = 7^2$

Con los números 35 y 36 no se cumple esta propiedad:

$35 + 1 = 36 = 6^2$ $\quad$ $2 \times 35 + 1 = 71 \neq 8^2$

Encuentra otro número que como el 24 cumpla esta propiedad.

Hay que probar con los números cuadrados perfectos restándoles 1:

35, 48, 63, 80, 99, 120, 143, 168, ...

Ayúdate de la tabla de cuadrados de la página 208.

2. Escribe los siguientes números utilizando potencias de 10:

a) 600.000 $\quad$ b) 800.000 $\quad$ c) 150.000 $\quad$ d) 8.000.000

3. Haz la descomposición polinómica de estos números:

a) $37.248 = 3 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 8$

b) 35.724 $\quad$ c) 12.743 $\quad$ d) 5.869

4. Escribe en forma de una sola potencia:

a) $3^4 \cdot 3^2$ $\quad$ b) $3 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3$ $\quad$ c) $2^6 : 2^2$ $\quad$ d) $\mathbf{a^2 \cdot a^3}$ $\quad$ e) $\mathbf{a^5 : a^2}$

5. Escribe en forma de una sola potencia:

a) $(3^3)^4$ $\quad$ b) $6^2 \cdot 5^2$ $\quad$ c) $(6^3)^4$ $\quad$ d) $\mathbf{a^2 \cdot b^2}$ $\quad$ e) $\mathbf{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4}$

6. Escribe en forma de producto de potencias:

a) $(3 \cdot 5)^4$ $\quad$ b) $(3 \cdot 7 \cdot 5)^4$ $\quad$ c) $\mathbf{(a \cdot b \cdot c)^3}$ $\quad$ d) $\mathbf{(x \cdot y \cdot z)^4}$

7. Escribe como potencias de potencia:

a) $4^3 = (2^2)^3$ $\quad$ c) 9^3 $\quad$ e) 25^3 $\quad$ g) 16^2

b) 8^5 $\quad$ d) 64^2 $\quad$ f) 36^3 $\quad$ h) 100^2

8. Escribe los cuadrados perfectos hasta el 400 y halla la raíz cuadrada de cada uno.

9. Halla las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{256}$ $\quad$ c) $\sqrt{441}$ $\quad$ e) $\sqrt{1.225}$ $\quad$ g) $\sqrt{4.728}$ $\quad$ i) $\sqrt{9.493}$

b) $\sqrt{529}$ $\quad$ d) $\sqrt{560}$ $\quad$ f) $\sqrt{1.256}$ $\quad$ h) $\sqrt{5.381}$ $\quad$ j) $\sqrt{10.000}$

1. Múltiplos y divisores

Múltiplo. Divisible. Divisor.

DIVISIÓN INEXACTA

$57 \mid 6$
$3 \quad 9$

→ **57 no es divisible por 6.**
57 no es múltiplo de 6.
6 no es divisor de 57.

0 6×1 6×2 6×3 6×4 6×5 6×6 6×7 6×8 6×9 6×10

0 6 12 18 24 30 36 42 48 54 60

Múltiplos de 6

DIVISIÓN EXACTA

$60 \mid 6$
$0 \quad 10$

→ • **60 es divisible por 6.**
• **60 es múltiplo de 6.**
• **6 es divisor de 60.**

En ocasiones no interesa saber el cociente de una división, sino que solamente importa saber si la división es exacta o inexacta.

Por ejemplo, en la siguiente cuestión:

¿Se pueden colocar 57 huevos en cajas de 6 huevos quedando las cajas completas, es decir, sin que sobre ni falte ningún huevo?

Aquí lo que interesa saber es si la división 57 : 6 es o no exacta. Como la división 57 : 6 es inexacta, los huevos no se pueden colocar en la forma indicada.

Se dice:

- Que 57 no es divisible por 6.
- Que 57 no es múltiplo de 6.
- Que 6 no es divisor de 57.

Si en lugar de 57 huevos hubiera habido 60 huevos, se podrían colocar en cajas de 6 sin que faltara ni sobrara ninguno, porque la división 60 : 6 es exacta.

Se dice:

- Que 60 es **divisible** por 6.
- Que 60 es **múltiplo** de 6.
- Que 6 es **divisor** de 60.

Para indicar que 60 es múltiplo de 6 se escribe sobre el divisor 6 un punto: $60 = \dot{6}$ (se lee sesenta es múltiplo de seis).

Un número natural a se dice que es divisible por otro b cuando la división a : b es exacta.
En este caso se dice también que a es múltiplo de b y que b es divisor de a.

1. Haz la división $50 \mid 6$ y responde:

a) ¿Es 50 múltiplo de 6? b) ¿Es 6 divisor de 50? c) ¿Es 50 divisible por 6?

2. Lee atentamente y responde:

A. El 6 es múltiplo de 1 porque $6 = 6 \times 1$. ¿Es 7 múltiplo de 1?
¿Cuáles de los siguientes números 6, 8, 12, 0, 3 son múltiplos de 1?
¿Conoces algún número que no sea múltiplo de 1?

B. El 17 no es divisible por 3 porque 17 : 3 no es división exacta.
¿Cuáles de los siguientes números 21, 32, 39, 42, 56, 57 son divisibles por 3?

C. El número 12 es divisor de 48 porque 48 : 12 = 4 es división exacta.
¿Es 12 divisor de 60? ¿Y de 80? ¿Y de 90?

2. Propiedades de los múltiplos

$0 = 1 \times 0$ $\quad 1 = 1 \times 1$ $\quad 2 = 1 \times 2$

$3 = 1 \times 3$ $\quad 4 = 1 \times 4$ $\quad 5 = 1 \times 5$

PRIMERA PROPIEDAD

Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad.

Observa que todo número se puede expresar como producto de 1 por él mismo.

$0 = 0 \times 3$ $\quad 0 = 0 \times 4$ $\quad 0 = 0 \times 5$

$0 = 0 \times 6$ $\quad 0 = 0 \times 7$ $\quad 0 = 0 \times 8$

SEGUNDA PROPIEDAD

El cero es múltiplo de cualquier número natural.

Como el producto de 0 por cualquier número da 0, resulta que 0 es múltiplo de cualquier número.

$60 = \dot{4}$ porque $60 = 4 \times 15$

$+ \ 12 = \dot{4}$ porque $12 = 4 \times 3$

$72 = \dot{4}$ porque $72 = 4 \times 18$

TERCERA PROPIEDAD

La suma de varios múltiplos de un número es múltiplo de ese número.

Consideremos dos múltiplos de 4, por ejemplo, **60** y **12**.

Si se suman $12 + 60 = 72$, el número que se obtiene, **72**, es también múltiplo de 4, ya que:

$$72 = 4 \times 18$$

$60 = \dot{4}$ porque $60 = 4 \times 15$

$- \ 12 = \dot{4}$ porque $12 = 4 \times 3$

$48 = \dot{4}$ porque $48 = 4 \times 12$

CUARTA PROPIEDAD

La diferencia de dos múltiplos de un número es múltiplo de dicho número.

Si se restan 60 y 12, que son múltiplos de 4, entonces $60 - 12 = 48$, el número que se obtiene, **48**, es también múltiplo de 4, ya que:

$$48 = 4 \times 12$$

$15 = \dot{5}$

Como $60 = \dot{15}$, también $60 = \dot{5}$

QUINTA PROPIEDAD

Si un número es múltiplo de otro todos los múltiplos del primero son múltiplos del segundo.

Consideremos el número **15**, que es múltiplo de 5.

Si se multiplica 15 por un número, por ejemplo 4, se obtiene **60**, que es otro múltiplo de 5, ya que:

$$60 = 5 \times 12$$

1. Resuelve y contesta:

- Si $90 = \dot{6}$ y $18 = \dot{6}$ ¿es $90 + 18 = \dot{6}$? ¿Y $90 - 18 = \dot{6}$?
- Si $90 = \dot{18}$ y $18 = \dot{6}$ ¿es $90 = \dot{6}$? ¿Qué propiedad aplicas?

2. Si a es múltiplo de 6 ¿es también a múltiplo de 3?

3. Criterios de divisibilidad. I

Divisibilidad por 10, por 2 y por 5.

MÚLTIPLOS DE 10	MÚLTIPLOS DE 2	MÚLTIPLOS DE 5
$10 \times 0 = 0$	$2 \times 0 = 0$	$5 \times 0 = 0$
$10 \times 1 = 10$	$2 \times 1 = 2$	$5 \times 1 = 5$
$10 \times 2 = 20$	$2 \times 2 = 4$	$5 \times 2 = 10$
$10 \times 3 = 30$	$2 \times 3 = 6$	$5 \times 3 = 15$
$10 \times 4 = 40$	$2 \times 4 = 8$	$5 \times 4 = 20$
$10 \times 5 = 50$	$2 \times 5 = 10$	$5 \times 5 = 25$
$10 \times 6 = 60$	$2 \times 6 = 12$	$5 \times 6 = 30$
$10 \times 7 = 70$	$2 \times 7 = 14$	$5 \times 7 = 35$
$10 \times 8 = 80$	$2 \times 8 = 16$	$5 \times 8 = 40$
$10 \times 9 = 90$	$2 \times 9 = 18$	$5 \times 9 = 45$
$10 \times 10 = 100$	$2 \times 10 = 20$	$5 \times 10 = 50$
$10 \times 11 = 110$	$2 \times 11 = 22$	$5 \times 11 = 55$
⋮	⋮	⋮
$10 \times n = \dot{10}$	$2 \times n = \dot{2}$	$5 \times n = \dot{5}$

En general, para saber si un número **a** es divisible o múltiplo de otro número **b** hay que hacer la división **a : b.**

Los criterios de divisibilidad nos permiten averiguar, en algunos casos, si **a** es divisible por **b** sin necesidad de hacer la división **a : b.**

Sabemos que los múltiplos de un número **b** se obtienen multiplicando **b** por los números naturales 0, 1, 2, ... :

$$b \times 0,\ b \times 1,\ b \times 2,\ b \times 3,\ b \times 4$$

Observa los múltiplos de 10, los múltiplos de 2 y los múltiplos de 5.

- Los múltiplos de 10 acaban todos en cero.
- Los múltiplos de 2 acaban en 0 o en cifra par (2, 4, 6, 8).
- Los múltiplos de 5 acaban en 0 o en 5.

Un número es divisible por 10 si acaba en cero.
Un número es divisible por 2 si acaba en cero o en cifra par.
Un número es divisible por 5 si acaba en cero o en 5.

Divisibilidad por 4 y por 25.

$$8.236 = 8.200 + 36$$
$$\dot{4} \quad + \quad \dot{4} \quad = \dot{4}$$

$$6.375 = 6.300 + 75$$
$$\dot{25} \quad + \quad \dot{25} \quad = \dot{25}$$

Como $100 = 4 \times 25$, todo número que termine en dos ceros es múltiplo de 100, y por tanto, múltiplo de 4 y a la vez múltiplo de 25.

Consideremos el número **8.236.** ¿Es múltiplo de 4?

Este número se puede escribir así: $8.236 = 8.200 + 36$.

Como 8.200 es múltiplo de 4, bastará ver si lo es 36.

Como 36 es múltiplo de 4 también lo será 8.236, por ser suma de dos múltiplos de 4. Como 36 no es múltiplo de 25, tampoco lo es 8.236.

Del mismo modo, **6.375** es múltiplo de 25.

Un número es divisible por 4 o por 25 si las dos últimas cifras son ceros o forman un número múltiplo de 4 o de 25, respectivamente.

1. Escribe:

A. Los doce múltiplos consecutivos de 20 siguientes a 60.

B. Diez números divisibles por 2, diez números divisibles por 5 y diez números que sean divisibles a la vez por 2 y por 5.

C. Los múltiplos de 4 comprendidos entre 100 y 200.

2. Contesta:

El número 23a4 es múltiplo de 4. ¿Qué valores puede tener la letra **a**?

4. Criterios de divisibilidad. II

$$36.120 = \underbrace{36.000}_{\dot{8}} + \underbrace{120}_{\dot{8}} = \dot{8}$$

Divisibilidad por 8 y por 125.

Como $1.000 = 8 \times 125$, todo número que acabe en tres ceros es múltiplo de 8 y múltiplo de 125.

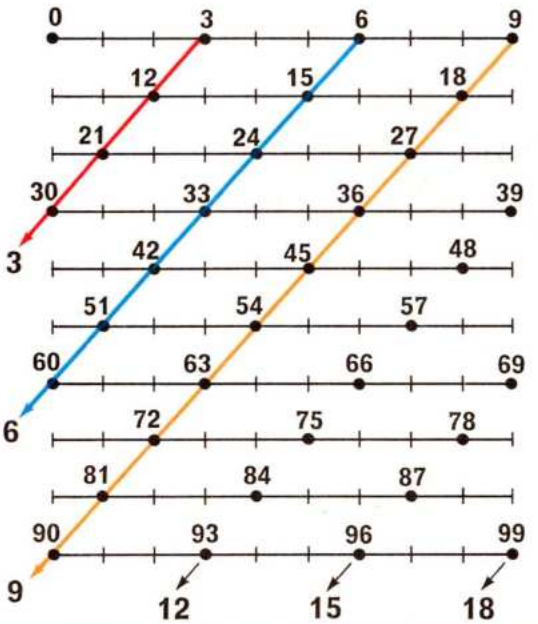
El número **36.120** se puede descomponer así:

$$36.120 = 36.000 + 120$$

Como el primer sumando termina en tres ceros, es múltiplo de 8 y de 125, y como $120 = 8 \times 15$ también es múltiplo de 8, luego 36.120 es múltiplo de 8.

Un número es divisible por 8 o por 125 si las tres últimas cifras son ceros o forman un número múltiplo de 8 o de 125, respectivamente.

Divisibilidad por 9 y por 3.



En el siguiente cuadro se han representado los números del 0 al 99.

Observa que:

- En la recta roja todos los números son múltiplos de 3 y que en cada uno de ellos la suma de sus cifras es 3.
- En la recta azul todos los números son múltiplos de 3 y que la suma de sus cifras es 6.
- En la recta amarilla, la suma de las cifras de cada número es 9, ..., que es múltiplo de 3.
- Las sumas de las cifras de los múltiplos de 3 son 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ..., que son múltiplos de 3.

  Esto significa que cuando se suman las cifras de un número múltiplo de 3 resulta un múltiplo de 3.
- Los múltiplos de 9, desde 9 hasta 90, también quedan en una recta y la suma de sus cifras es 9.

  En todo número múltiplo de 9 la suma de sus cifras es también múltiplo de 9.

Un número es divisible por 9 o por 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9 o de 3, respectivamente.

1. El número 3.924 es divisible por 9 y por 3 porque $3 + 9 + 2 + 4 = 18$ es múltiplo de 9 y de 3.

Indica cuáles de los siguientes números son divisibles por 9 o por 3:

342 127 1.256 9.642 5.481

2. Contesta:

¿Cuál es el valor que debe tener la letra **a** para que los números siguientes sean divisibles por 3?

a) 2a46 b) 301a c) 413a d) a314

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. ¿Cuáles de los siguientes números son divisibles por 10?

10 100 20 34 50 60 800 1.000

2. ¿Cuáles de los siguientes números son divisibles por 2? ¿Y por 5?

2 10 20 348 1.246 325 474

3. ¿Cuáles de los siguientes números son divisibles por 3?

3 12 15 32 51 75 78 126 122

4. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 9?

191 171 234 450 720 270 172

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe todos los múltiplos de 3 comprendidos entre 200 y 250.

2. Escribe un número cualquiera de tres cifras. ¿Es múltiplo de 3?

En caso contrario indica dos múltiplos consecutivos de tres cifras entre los cuales se encuentre el número escrito por ti.

3. Divisibilidad por 6.

EJEMPLO RESUELTO

Un número es divisible por 6 cuando es divisible por 2 y por 3 a la vez.

Por ejemplo, 942 es divisible por 6, ya que es divisible por 2 y por 3.

Indica cuáles de los siguientes números es divisible por 6:

a) 6.312 b) 3.128 c) 492 d) 572 e) 396 f) 570

4. El conjunto de los múltiplos de 7 se escribe **M**(7), o bien $\{\dot{7}\}$.

Escribe diez elementos de este conjunto: **M**(7) = $\{\dot{7}\}$ = {0, 7, ...}.

¿Cuántos múltiplos de 7 hay?

5. El resto de dividir el número 2.354 por 3 es 2, ya que al dividir la suma de sus cifras (14) por 3 da de resto 2.

¿Cuál es el resto de dividir por 3 los números 847 y 9.742?

6. Contesta:

- ¿Puede terminar un múltiplo de 5 en 6? ¿Y en 7?
- ¿Cuántos múltiplos de 3 hay? ¿Y de 5?

7. Si **a** es múltiplo de 21 ¿puedes decir algún número natural del que **a** sea múltiplo?

8. ¿Cuál es el resto de dividir el número 2,723.542 por 3?

9. ¿Qué cifra se debe poner en lugar de la letra **a** en el número 408**a**8 para obtener un número que dividido por 9 dé de resto 6?

10. Escribe los múltiplos de 12 que tengan tres cifras.

11. Divisibilidad por 11.

EJEMPLO RESUELTO

Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras de lugar par y la suma de las cifras de lugar impar es múltiplo de 11 (la resta se hace en el sentido que sea posible).

Así, 121 es divisible por 11 porque **1 + 1 − 2 = 0**, que es múltiplo de todos los números, y por tanto de 11.

Averigua los números que son divisibles por 11:

a) 2.332 b) 7.150 c) 9.185 d) 4.532 e) 84.259

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Si en la televisión las pausas publicitarias fuesen siempre de tres minutos de duración, ¿se podrían emitir en un día 122 minutos de publicidad? ¿Se podrían emitir en un día 2 horas de publicidad?

2. En una competición de atletismo, un locutor de radio dice:
«Los 146 atletas del equipo A entran en el estadio en grupos de 6, y los 164 atletas del equipo B entran en el estadio en grupos de 4.»
¿Se ha equivocado el locutor en su afirmación? ¿Por qué?

3. Si las hojas de un libro se agrupan de 100 en 100 sobran 40 hojas.
¿Es posible agrupar las hojas de ese libro de 5 en 5 sin que sobre ninguna? ¿Y de 4 en 4?

4. Por la venta de papeletas de rifas de 9 ptas. cada una, un niño obtiene varios billetes de 100 ptas. y 84 ptas. en monedas.
¿Cuántas papeletas vendió si el dinero que tiene no llega a 1.000 ptas.?

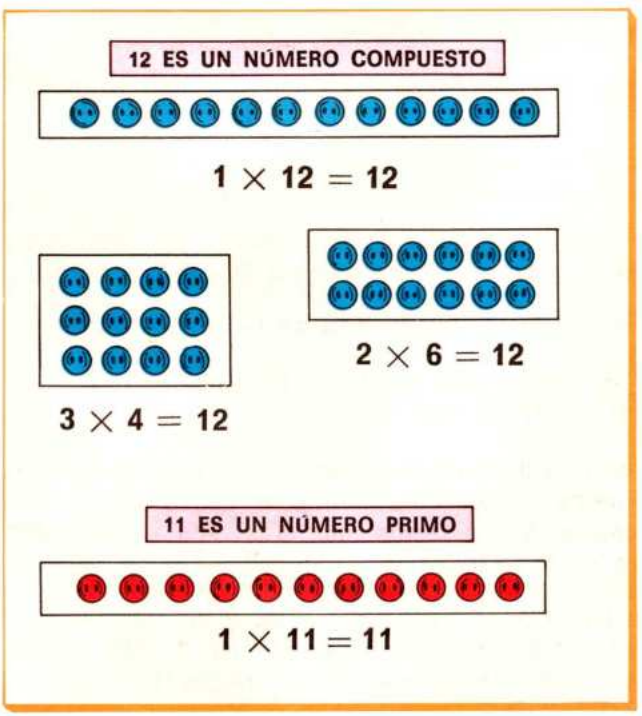
5. Los periodistas asistentes a una rueda de prensa son más de 100 y menos de 120. Su número es tal, que si se agrupan de 5 en 5 sobran 2, si se agrupan de 2 en 2 sobra 1 y si lo hacen de 3 en 3 no sobra ninguno.
¿Cuál es el número de periodistas?

6. El número de participantes en un desfile es tal que pueden desfilar formados de 3 en 3, de 5 en 5 o de 25 en 25, pero no pueden hacerlo de 4 en 4 ni de 9 en 9.
¿Cuál puede ser el número de participantes en el desfile si son más de 1.000 y menos de 2.000?

7. 144 niños quieren agruparse por equipos teniendo cada equipo el mismo número de niños.
¿De cuántas maneras se pueden agrupar? ¿Cuál sería, en cada caso, el número de niños por equipo?

TEMA 6 DIVISIBILIDAD. NÚMEROS PRIMOS

1. Números primos



Números primos y números compuestos.

Con 12 botones o 12 elementos cualesquiera, puedes formar rectángulos completos de varias formas.

Cada uno de estos rectángulos se corresponde con una forma de descomponer **12** en producto de factores.

$$12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$$

Esto significa que los números 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son divisores de 12. Se escribe:

$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

En cambio, 11 botones sólo se pueden disponer en una fila de 11. Esto es debido a que 11 sólo admite como factores al 1 y a él mismo:

$$11 = 1 \times 11$$

Esto significa que 11 sólo tiene como divisores al 1 y al 11.

Se dice que el 11 es un **número primo** porque sólo tiene como divisores 1 y él mismo, y que 12 es un **número compuesto** porque además del 1 y del 12 admite otros divisores: 2, 3, 4 y 6.

Un número natural distinto de 1 se dice que es número primo si sólo tiene como divisores el 1 y él mismo.

Un número natural se dice que es número compuesto si tiene otros divisores además del 1 y de él mismo.

1. Lee y resuelve:

A. ¿Puedes formar con 13 botones un rectángulo de 2 filas? ¿Y un rectángulo de 3 filas? ¿Y de 4 filas? ¿De cuántas formas puedes descomponer en factores el número 13? ¿Es 13 un número primo?

B. El número de años de Antonio, multiplicado por el número de años de su hermana mayor, Eva, es 13. ¿Qué edad tiene cada uno?

C. Se tienen 14 lápices y se quiere colocar igual número de lápices en cada caja. ¿De cuántas formas se puede hacer? ¿Es 14 un número compuesto o primo?

2. Contesta:

- ¿Puedes dibujar 17 puntos formando un rectángulo de varias filas?
- ¿Puedes distribuir 17 caramelos exactamente en cajas de 3 caramelos? ¿Y en cajas de 5 caramelos? ¿Y en cajas de 7 caramelos? Si tienes que distribuir exactamente 17 caramelos en cajas ¿cuántas cajas necesitas?
- ¿Es 17 un número primo?

3. Escribe el número 28 como producto de dos factores, de todos los modos posibles.

Dibuja para cada producto un rectángulo de puntos que represente cada producto.

¿Es 28 primo o compuesto?

2. Construcción de una tabla de números primos

La criba de Eratóstenes.

①

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

②

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

③

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	10
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	16	17	~~18~~	19	20
~~21~~	22	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	28	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	70
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	100

④

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	16	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	22	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	28	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
~~71~~	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	~~83~~	~~84~~	~~85~~	~~86~~	87	~~88~~	~~89~~	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

⑤

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	16	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	22	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	50
~~51~~	~~52~~	~~53~~	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
~~71~~	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	~~83~~	~~84~~	~~85~~	~~86~~	87	~~88~~	~~89~~	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... son números primos.

Pero ¿cuántos números primos hay?

Desde los griegos se sabe que hay infinitos números primos.

Veamos cómo se puede construir una tabla que contenga los números primos menores que 100.

Esta tabla se llama **Criba de Eratóstenes,** por haber sido este matemático griego el primero que la construyó.

Para construir esta criba se procede así:

① Se escriben todos los números desde el 2 (primer número primo) hasta el 100.

② Tachando de 2 en 2 a partir del 2 se suprimen los números compuestos múltiplos de 2. Así quedan tachados a la vez los múltiplos de 2 y los múltiplos de 4.

③ Tachando de 3 en 3 a partir de 3 se suprimen los números compuestos múltiplos de 3. Algunos de estos números los encontrarás ya tachados por ser múltiplos de 2.

④ Tachando de 5 en 5 a partir de 5 se suprimen los números compuestos múltiplos de 5.

⑤ Tachando de 7 en 7 a partir de 7 se suprimen los números múltiplos de 7.

⑥ El primer número primo que sigue al 7 es el 11, y tachando de 11 en 11 a partir del 11, se eliminan todos sus múltiplos.

Pero al hacer esto se observa que ya están todos los múltiplos de 11 tachados, por lo que ya no hace falta continuar.

CRIBA DE ERATÓSTENES

	2	3		5		7		
11		13				17		19
		23						29
31						37		
41		43				47		
		53						59
61						67		
71		73						79
		83						89
						97		

3. Modo de averiguar si un número es primo o compuesto

El número 127 ¿es primo o compuesto?

① **127 no es divisible por 2**

127 no es divisible por 3

127 no es divisible por 5

② 127 | 7
57 18
1

127 no es divisible por 7

③ 127 | 11
17 11
6

127 no es divisible por 11

④ 127 | 13
10 9

127 no es divisible por 13

① En primer lugar, se comprueba si el número es divisible por los números primos 2, 3 y 5 aplicando los criterios de divisibilidad correspondientes.

- 127 no es divisible por 2 porque 7 no es cifra par.
- 127 no es divisible por 3 porque la suma de sus cifras (1 + 2 + 7 = 10) no es múltiplo de 3.
- 127 no es divisible por 5 porque no acaba ni en cero ni en 5.

② En segundo lugar, se comprueba si 127 es divisible por 7; para ello se divide 127 por 7.

Como esta división no es exacta, 127 no es divisible por 7.

③ A continuación se comprueba si 127 es divisible por el siguiente número primo, 11. Como la división no es exacta, 127 no es divisible por 11.

④ A continuación se comprueba si 127 es divisible por el siguiente número primo, que es 13.

Cuando en una de las divisiones como 127 : 11 el cociente es igual o menor que el divisor, no es necesario seguir comprobando. Como todas las divisiones han sido inexactas, el número 127 es primo.

Para averiguar si un número es primo o compuesto, se divide por la serie de números primos, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... hasta llegar a una división cuyo cociente sea igual o menor que el divisor. Si todas las divisiones son inexactas, el número propuesto es número primo.

1. Averigua cuáles de los siguientes números son primos:

a) 101 b) 123 c) 143 d) 157 e) 511

2. Escribe los números primos comprendidos entre 2 y 30.

3. Escribe los números del 2 al 200.

Tacha los siguientes números:

a) De dos en dos a partir del 2.
b) De tres en tres a partir del 3.
c) De cinco en cinco a partir del 5.
d) De siete en siete a partir del 7.
e) De once en once a partir del 11.
f) De trece en trece a partir del 13.
g) De diecisiete en diecisiete a partir del 17.

¿Están ya tachados todos los múltiplos de 17?

Así tienes sin tachar todos los números primos menores que 200.

4. Descomposición de un número en producto de factores primos

Descomposición factorial.

75 no es divisible por 2.

75 | 3 25 |	→ $75 = 3 \times 25$

75 | 3 25 | 5 5 |	→ $75 = 3 \times 5 \times 5$

75 | 3 25 | 5 5 | 5 1 |	→ $75 = 3 \times 5^2$

Un número compuesto, por ejemplo **75**, se puede descomponer en producto de factores primos.

Para ello se ensayan 2, 3, 5, 7, ...

- Como 75 no acaba en cero ni en cifra par, no es divisible por 2.
- Como $7 + 5 = 12$ y 12 es múltiplo de 3, resulta que 75 es divisible por 3.

La división $75 : 3 = 25$ nos permite escribir:

$$75 = 3 \times 25$$

Ahora se aplica al factor 25 el mismo procedimiento. Como 25 acaba en 5, es divisible por 5:

$$25 = 5 \times 5$$

Así resulta $75 = 3 \times 5 \times 5$.

120 | 2 60 | 2 30 | 2 15 | 3 5 | 5 1 |

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

En la práctica, los cálculos se obtienen escribiendo el número a la izquierda de una raya vertical y los divisores primos a la derecha.

De la misma manera se puede hacer la descomposición de cualquier número compuesto.

$$120 = 2 \times 60 = 2 \times 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 2 \times 15$$
$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$$

Todo número compuesto se puede expresar como un producto de factores primos.

1. Averigua si los siguientes números son primos o compuestos:

a) 91 b) 121 c) 143 d) 229 e) 557 f) 671

2. Haz la descomposición en factores primos de estos números:

a) 40 c) 60 e) 216 g) 240 i) 75 k) 3.500
b) 50 d) 100 f) 360 h) 180 j) 2.250 l) 3.600

3. Lee y resuelve:

A. Los números **a** y **b**, descompuestos en producto de factores primos, son $\mathbf{a} = 2^3 \times 3^2 \times 5$ y $\mathbf{b} = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$.

¿Qué números son **a** y **b**?

B. Al descomponer en factores un número que acaba en ceros, debes recordar que como $10 = 2 \times 5$, entonces $100 = 10^2 = (2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2$.

Análogamente, $3.000 = 3 \times 1.000 = 3 \times 2^3 \times 5^3$

4. Haz de este modo la descomposición en productos de factores primos de:

a) 3.600 b) 4.500 c) 5.000 d) 8.000 e) 20.000

5. Criterio de divisibilidad de números descompuestos en factores primos

Divisibilidad por descomposición en factores.

1.680	2
840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$$1.680 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

Observa los números **1.680** y **120** descompuestos en factores primos.

¿Es 1.680 divisible por 120?

Se observa que:

1.º El número 1.680 tiene todos los factores de 120 (2, 3, 5) y un factor más (7).

2.º Que los factores comunes (2, 3, 5) figuran en 1.680 con iguales o mayores exponentes que en 120.

Por ello se puede escribir:

$1.680 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7 = 2 \times (2^3 \times 3 \times 5) \times 7 = 120 \times 14$

Lo que significa que 1.680 es múltiplo de 120 o que 1.680 es divisible por 120.

$$560 = 2^4 \times 5 \times 7$$

$$120 = 2^3 \times 5 \times 3$$

En cambio, **560** no es divisible por **120** porque el factor (3) de 120 no figura en la descomposición de 560.

Un número natural a es divisible por otro b si todos los factores primos que aparecen en la descomposición en factores primos de b figuran en la descomposición factorial de a con iguales o mayores exponentes.

1. Contesta:

¿Es $2^4 \times 3^2$ divisible por $2^2 \times 3^2$? ¿Y por $2^3 \times 3^2$? ¿Y por $2^3 \times 3^3$?

2. Lee y resuelve:

Se tienen los números $\mathbf{a} = 2^5 \times 3^2 \times 5$, $\mathbf{b} = 2^4 \times 3 \times 5$ y $\mathbf{c} = 2^5 \times 3 \times 5$.

El cociente **a : b** se puede hallar así: $\mathbf{a : b} = \dfrac{2^5 \times 3^2 \times 5}{2^4 \times 3 \times 5} = 2 \times 3 = 6$.

Calcula de este modo los cocientes **a : c** y **c : b**.

3. Escribe cinco números múltiplos de $2^2 \times 3$.

4. Contesta:

a) ¿Es 2×3 divisible por 2? ¿Y por 3? ¿Es cierto que todo número divisible por 6 es divisible por 2 y por 3 a la vez?

b) ¿Puedes asegurar que todo múltiplo de 2 es múltiplo de 4?

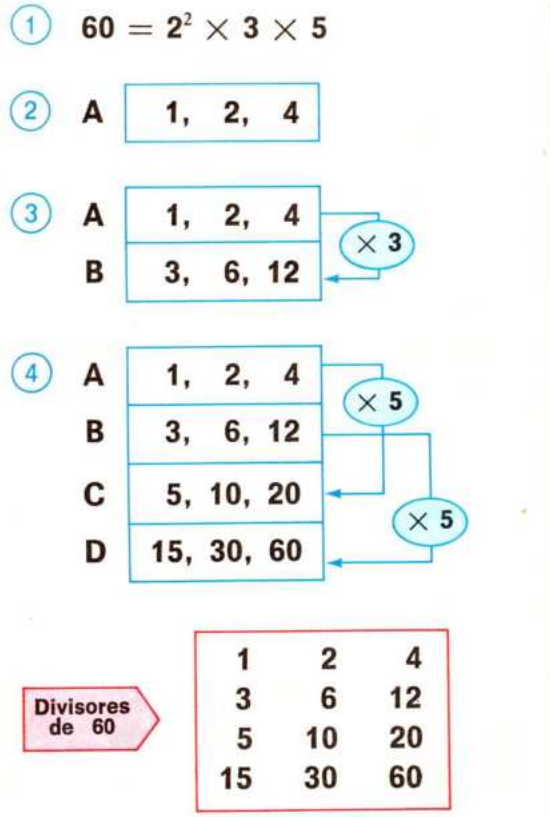
c) ¿Puedes asegurar que todo múltiplo de 3 lo es de 6? Pon ejemplos.

5. Lee y contesta:

Si **a** es múltiplo de 15 ¿qué factores aparecerán con seguridad en la descomposición en factores primos de **a**? ¿Es múltiplo de 5? ¿Es divisible por 3?

6. El conjunto de los divisores de un número

Divisores de un número.



Vamos a hallar todos los divisores de un número, por ejemplo **60.**

Para hallar todos los divisores de 60 se procede así:

1. Se descompone 60 en productos de factores primos: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.
2. Se escribe el 1 y las potencias sucesivas del primer factor (1; $2^1 = 2$; $2^2 = 4$), que se han colocado en la fila **A.**
3. Se multiplican los divisores de la fila **A** por el segundo factor 3 y así resultan otros divisores de 60 (3, 6, 12), que ocupan la fila **B.**
4. Finalmente, las dos filas de divisores **A** y **B** se multiplican por el último factor primo (**5**), y así resultan las filas **C** y **D.**

Observa que el cuadro que contiene todos los divisores de 60 empieza por el 1, que es divisor de todos los números, y termina por 60, que es el número dado.

1. Observa la descomposición de 72 en factores primos: $72 = 2^3 \times 3^2$.

Para hallar todos los divisores de 72, escribe el 1 y las potencias $2^1 = 2$, $2^2 = 4$ y $2^3 = 8$.

Así obtienes la primera fila o fila **A**, formada por 1, 2, 4, 8. Multiplica los números de esta fila por 3 y obtendrás la fila **B**. Finalmente multiplica los números de la fila **A** por $3^2 = 9$ y obtendrás la última fila **C** de divisores.

Halla todos los divisores de cada uno de los siguientes números:

a) 80 b) 150 c) 90 d) 200 e) 84 f) 100 g) 120 h) 180

2. Lee y resuelve:

Un número **n**, descompuesto en factores primos, es $\mathbf{n} = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$.

a) Escribe todos los divisores del número **n**.

b) ¿Cuál es el menor de estos divisores? ¿Y el mayor?

Comprueba que el número de divisores de **n** se obtiene sumando una unidad a cada exponente y multiplicando después estos números:
$(2 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$ divisores.

3. Contesta:

a) ¿Es 2×3 divisor de $2^2 \times 3$?

b) ¿Es 5^2 divisor de 5^3?

c) ¿Es 2×5 divisor de 2×5^2?

d) ¿Es 3×7 divisor de $3 \times 7 \times 5$?

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Haz la descomposición en factores de:

① 4	③ 22	⑤ 15	⑦ 8	⑨ 26	⑪ 18	⑬ 10	⑮ 28
② 14	④ 6	⑥ 25	⑧ 16	⑩ 9	⑫ 27	⑭ 20	⑯ 11

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe todas las descomposiciones de 60 en producto de dos factores que sean números pares.

2. Con 41 alumnos ¿se puede hacer un número exacto de grupos de 2? ¿Y de 3?
¿Se pueden hacer grupos iguales de 41 alumnos sin que sobre ninguno?

3. ¿Cuál es el único número primo que es par?

4. Al dividir un número **n** por 7 da de resto 3. ¿Es **n** múltiplo de 7?
¿Cuánto se debe restar a **n** para obtener un múltiplo de 7?
¿Cuánto se debe sumar a **n**, como mínimo, para obtener un múltiplo de 7?

5. Si **a** es un número primo ¿cuántos elementos tiene el conjuno **D(a)** de sus divisores?

6. Haz la descomposición factorial en producto de factores primos de:

a) 1.400 b) 1.690 c) 1.440 d) 2.560 e) 1.210

7. Si **a**, **b** y **c** son tres múltiplos de 6 ¿qué factores comunes, por lo menos, tienen **a**, **b** y **c**?

8. Averigua cuáles de los siguientes números son primos:

a) 137 b) 221 c) 289 d) 713

9. Averigua si son primos los números naturales siguientes:

a) 43 b) 131 c) 101 d) 203

10. Contesta y comprueba:

- ¿Puede ser primo un número que acabe en 6?
- ¿Puede ser primo un número que acabe en 5?
- ¿Es primo un número que sólo tiene dos divisores?

11. Observa las descomposiciones de los números **A**, **B** y **C** y contesta:

$\mathbf{A} = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$ $\mathbf{B} = 2^2 \times 3^2 \times 5$ $\mathbf{C} = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$

a) ¿Es **A** múltiplo de **B**?
b) ¿Es **B** múltiplo de **C**?
c) ¿Es **C** múltiplo de **B**?
d) ¿Es **C** múltiplo de **A**?
e) ¿Por qué número se debe multiplicar **A** para obtener **C**?
f) ¿Por qué número se debe multiplicar **B** para obtener **A**?

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

1. Completa y encontrarás una extraña y bonita disposición:

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$1\ 2 \times 8 + 2 = 9\ 8$$
$$1\ 2\ 3 \times 8 + 3 = 9\ 8\ 7$$
$$1\ 2\ 3\ 4 \times 8 + 4 =$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5 \times 8 + 5 =$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \times 8 + 6 =$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \times 8 + 7 =$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \times 8 + 8 =$$
$$2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \times 8 + 9 =$$

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. ¿De cuántas formas se pueden distribuir 68 tornillos en cajas conteniendo cada caja igual número de tornillos? ¿Se pueden distribuir 67 tornillos en cajas de modo que cada caja contenga el mismo número de tornillos?

2. 34 niños quieren agruparse por equipos, teniendo cada equipo igual número de niños. ¿De cuántas formas distintas lo pueden hacer? Si a los 34 niños se les añaden 3 niños más, ¿hay alguna forma de que se agrupen por equipos de igual número de niños cada uno?

3. Un grupo de bailarines es de tal forma que si bailan por parejas sobra uno, si bailan en grupos de tres sobran dos y si bailan en grupos de cinco sobran dos. El número de bailarines es mayor que 10 y menor que 20. ¿Cuántos bailarines son? ¿Pueden estos bailarines bailar por grupos de igual número de bailarines?

4. Diana entra en una pastelería y compra varios caramelos iguales, por los que paga en total 89 ptas. ¿Cuántos caramelos compró y cuánto le costó cada uno?

5. Por varias libretas iguales Luis pagó 243 ptas. ¿Cuál pudo haber sido el precio de cada libreta y cuántas compraría Luis en cada caso?

6. Por más de 50 chocolatinas iguales se pagaron 1.908 ptas. ¿Cuál es el precio de la chocolatina si se sabe que es superior a 5 duros?

7. La recaudación de la máquina automática que despacha billetes de autobús de precio único es de 3.015 ptas. un día y de 2.948 ptas. al día siguiente. ¿Cuánto cuesta el billete del autobús? ¿Cuántos se despacharon cada día?

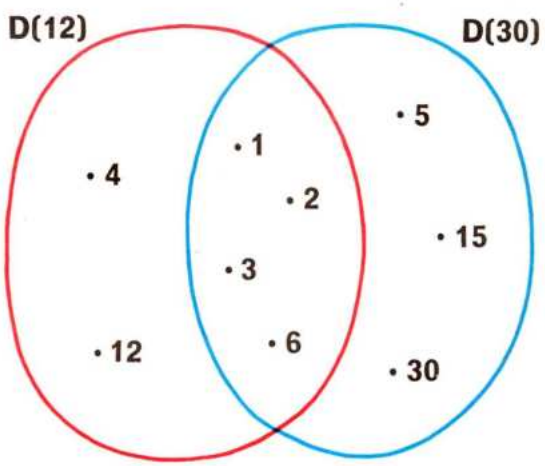
8. El número de peldaños de las escaleras de una torre es de 148. ¿De cuántas formas es posible bajarlos o subirlos a saltos, saltando siempre el mismo número de peldaños? ¿Y si las escaleras tuvieran 101 peldaños?

9. El curso 6.º A de un colegio tiene un alumno más que el curso 6.º B y el curso 6.º B tiene un alumno más que el curso 6.º C. Si se reúnen los alumnos de los tres cursos ¿se pueden formar con ellos dos grupos de igual número de alumnos? ¿Se pueden formar tres grupos de igual número de alumnos?

TEMA 7 MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

1. Máximo común divisor de dos números. I

Divisores comunes de dos números.



D(12) ∩ D(30) = {1, 2, 3, 6}

Consideremos los números **12** y **30**.

Las descomposiciones factoriales de 12 y de 30 son:

$12 = 2^2 \times 3$ $\qquad$ $30 = 2 \times 3 \times 5$

Los divisores de 12 y de 30 son:

D(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}
D(30) = {1, 2, 3, 5, 6, 15, 30}

Observa los diagramas de Venn de los conjuntos **D(12)** y **D(30)**.

¿Qué números son divisores de 12 y de 30 a la vez?

Los divisores comunes son el conjunto intersección **D(12) ∩ D(30)**:

D(12) ∩ D(30) = {1, 2, 3, 6}

1, 2, 3 y 6 son los divisores comunes de 12 y 30.

Máximo común divisor de dos números.

m.c.d. (12, 30) = 6

Acabamos de ver que los divisores comunes de 12 y de 30 son 1, 2, 3, 6.

El mayor de estos divisores comunes es 6.

6 es el máximo común divisor de 12 y 30.

Se escribe: **m.c.d. (12, 30) = 6.**

El máximo común divisor de dos números es el mayor de los divisores comunes de ambos números.

1. Halla el conjunto de los divisores comunes de 12 y 15.

¿Cuál es el menor divisor común? ¿Y el mayor divisor común?

2. Halla el conjunto de los divisores comunes de 8 y 9.

¿Cuál es el m.c.d. (8, 9)?

3. Halla:

a) **D(60)** y **D(40)** $\qquad$ b) **D(60) ∩ D(40)** $\qquad$ c) **D(15) ∩ D(40)**

4. Representa en diagramas de Venn los conjuntos D(24) y D(32).

Calcula después el conjunto **D(24) ∩ D(32)**. ¿Cuál es el m.c.d. (24, 32)?

2. Máximo común divisor de dos números. II

$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$

$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$D(6) \cap D(12) = \{1, 2, 3, 6\} = D(6)$

$m.c.d.\ (12, 6) = 6$

Máximo común divisor de dos números cuando uno es múltiplo de otro.

Consideremos dos números uno múltiplo del otro, como por ejemplo los números **12** y **6**.

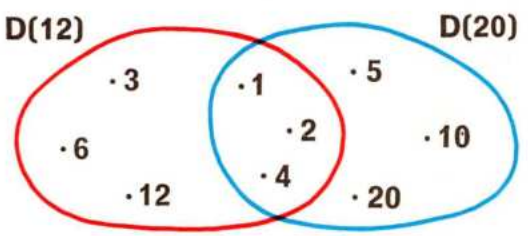
12 es múltiplo de 6, ya que $12 = 6 \times 2$, es decir, 6 es divisor de 12. Como también 6 es divisor de 6, resulta que 6 es el mayor divisor común de 6 y 12:

$$m.c.d.\ (12, 6) = 6$$

En general, si $a = \dot{b}$, entonces $m.c.d.\ (a, b) = b$.

Si un número es múltiplo de otro, el menor es el máximo común divisor de ambos.

$20 \mid 12$
$8 \quad 1$



$D(20) \cap D(12) = \{1, 2, 4\}$
$D(20) \cap D(8) = \{1, 2, 4\}$

$D(20) \cap D(12) = D(12) \cap D(8)$

Divisores comunes del dividendo, del divisor y del resto.

Consideremos la división $20 \mid 12$ / $8 \quad 1$

Observa los divisores del dividendo (**20**) y del divisor (**12**):

$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Los divisores comunes son $D(20) \cap D(12) = \{1, 2, 4\}$.

Observa ahora los divisores del divisor (**12**) y del resto (**8**):

$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$

Los divisores comunes son $D(12) \cap D(8) = \{1, 2, 4\}$.

Se observa que los divisores comunes del dividendo (**20**) y del divisor (**12**) son los mismos que los divisores comunes del divisor (**12**) y del resto (**8**).

Los divisores comunes del dividendo y del divisor de una división entera son los mismos que los divisores comunes del divisor y del resto por defecto de esa división.

1. **Contesta:**

   A. ¿Es 15 múltiplo de 5? ¿Cuál es el m.c.d. (15, 5)?
   B. Si **a** es múltiplo de 6 ¿cuál es el m.c.d. (**a**, 6)?

2. **Representa en diagramas de Venn estos conjuntos: D(20) y D(30).**

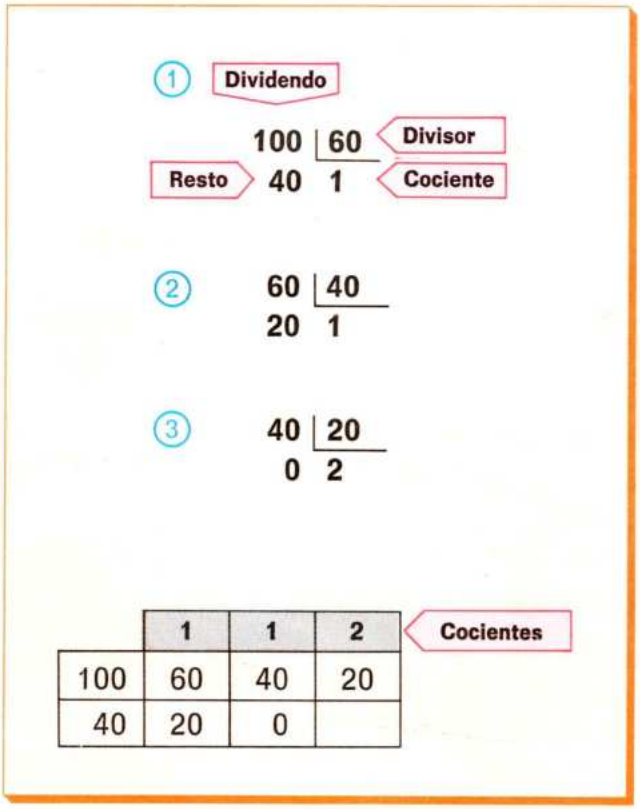
   Calcula después el conjunto $D(20) \cap D(30)$.

3. **Considera la división** $64 \mid 48$ / 16

   Comprueba que m.c.d. (64, 48) = m.c.d. (48, 16).

3. Cálculo del máximo común divisor. I

Método de Euclides o de las divisiones sucesivas para calcular el m.c.d. de dos números.



	1	1	2	Cocientes
100	60	40	20	
40	20	0		

Vamos a calcular el máximo común divisor de **100** y **60** haciendo sucesivas divisiones.

1. Se divide 100 entre 60 y da de resto 40. Entonces m.c.d. (100, 60) = m.c.d. (60, 40).
2. Se divide 60 entre 40 y da de resto 20. Entonces m.c.d. (60, 40) = m.c.d. (40, 20).
3. Se divide 40 entre 20. Como el resto es 0, 40 es múltiplo de 20, luego m.c.d. (40, 20) = 20.

Así se tiene:

m.c.d. (100, 60) = m.c.d. (60, 40) = m.c.d. (40, 20) = 20

Esta forma de encontrar el máximo común divisor de dos números se llama método de las **divisiones sucesivas** o **método de Euclides.**

En la práctica se disponen los números como se indica en el cuadro.

Números primos entre sí.

D(20) = {1, 2, 4, 5, 10, 20}
D(21) = {1, 3, 7, 21}
D(20) ∩ D(21) = {1}

Observa los divisores comunes de **20** y **21**.

$$D(20) \cap D(21) = \{1\}$$

El único divisor común de 20 y 21 es 1. Por esta razón el m.c.d. (20, 21) = **1**.

Los números 20 y 21 se dice que son **primos entre sí.**

Dos números se dice que son primos entre sí si su único divisor común es el 1. El m.c.d. de dos números primos entre sí es 1.

1. Calcula el m.c.d. de los siguientes pares de números:

a) 10 y 20 c) 12 y 18 e) 45 y 80 g) 48 y 96 i) 250 y 100
b) 24 y 20 d) 36 y 90 f) 75 y 80 h) 100 y 90 j) 360 y 140

2. Contesta:

A. ¿Son 40 y 63 números primos entre sí? ¿Es 40 un número primo? ¿Y 60?

B. ¿Son 11 y 13 primos entre sí? ¿Es 11 primo? ¿Y 13?

4. Cálculo del máximo común divisor. II

Método de descomposición en producto de factores primos para calcular el m.c.d. de dos números.

Vamos a calcular el m.c.d. **(24, 180)**.

Para ello se hace lo siguiente:

① Se descomponen ambos números en productos de factores primos:

$$24 = 2^3 \times 3$$
$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

Se escriben todos los factores comunes que aparecen en anbas descomposiciones. En este caso el 2 y el 3.

② Se forma el producto de los anteriores factores comunes elevando cada uno de ellos al menor de los exponentes: $2^2 \times 3$.

$$\textbf{m.c.d. (24, 180)} = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

m.c.d. (24, 180)

① Descomponemos en factores primos:

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$24 = 2^3 \times 3$
$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

② Formamos el producto de los factores comunes elevando cada uno de ellos al menor de los exponentes:

$24 = 2^3 \times 3$
$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

m.c.d. (180, 24) $= 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$

Método de descomposición en producto de factores primos para calcular el m.c.d. de varios números.

El mismo método anterior se puede aplicar cuando se trata de hallar el máximo común divisor de más de dos números.

Observa cómo se calcula el m.c.d. **(36, 60, 48)**.

Los factores comunes son 2 y 3. El producto de estos factores elevado cada uno al menor exponente es $2^2 \times 3$.

$$\textbf{m.c.d. (36, 60, 48)} = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

m.c.d. (36, 60, 48)

① Descomponemos en factores primos:

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$36 = 2^2 \times 3^2$
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
$48 = 2^4 \times 3$

② Formamos el producto de los factores comunes elevando cada uno de ellos al menor de los exponentes:

$36 = 2^2 \times 3^2$
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
$48 = 2^4 \times 3$

m.c.d. (36, 60, 48) $= 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$

1. Halla el máximo común divisor de los siguientes pares de números.

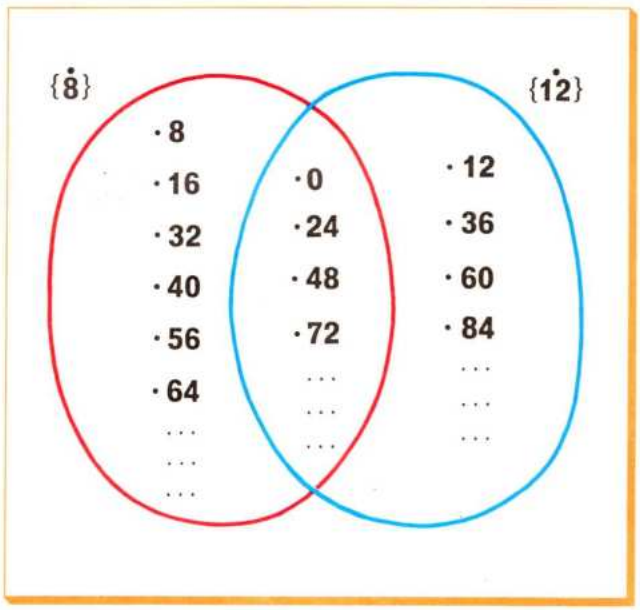
Usa el método de descomposición de factores.

a) 75 y 90 b) 125 y 225 c) 72 y 180 d) 450 y 700 e) 520 y 600

2. Halla el máximo común divisor de las siguientes series de números:

a) 20, 40 y 60 b) 25, 60 y 90 c) 75, 80 y 90 d) 150, 250 y 300

5. Mínimo común múltiplo



Múltiplos comunes de dos números.

Consideremos los números **8** y **12**.

- El conjunto $\{\dot{8}\}$ de los múltiplos de 8 es:
  $\{\dot{8}\} = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, \ldots\}$
  El conjunto $\{\dot{8}\}$ de los múltiplos de 8 es infinito.
- El conjunto $\{\dot{12}\}$ de los múltiplos de 12 es:
  $\{\dot{12}\} = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, \ldots\}$
  El conjunto $\{\dot{12}\}$ de los múltiplos de 12 es infinito.

En general, el conjunto de los múltiplos de cualquier número es un conjunto infinito.

Los múltiplos comunes de 8 y 12 es el conjunto intersección de $\{\dot{8}\}$ y de $\{\dot{12}\}$:

$$\{\dot{8}\} \cap \{\dot{12}\} = \{0, 24, 48, 72, \ldots\}$$

Se observa que el conjunto de los múltiplos comunes es también un conjunto infinito.

Mínimo común múltiplo de dos números.

Acabamos de ver que los múltiplos comunes de 8 y 12 son: 0, 24, 48, 72, ...

- El menor múltiplo común de 8 y 12 es **0**.
- El menor múltiplo común de 8 y 12 distinto de cero es **24**.

El mínimo común múltiplo de 8 y 12 es **24**.

Se escribe: **m.c.m. (8, 12) = 24.**

El mínimo común múltiplo de dos números es el menor de los múltiplos comunes distinto de cero de dichos números.

1. Halla los diez primeros múltiplos de 4 y los diez primeros múltiplos de 3.

Representa en diagramas de Venn los conjuntos $\{\dot{4}\}$ y $\{\dot{3}\}$. Escribe los cinco primeros elementos del conjunto intersección $\{\dot{4}\} \cap \{\dot{3}\}$.

- ¿Cuál es el m.c.m. (4, 3)? Calcula también $\{\dot{6}\} \cap \{\dot{4}\}$ y el m.c.m. (6, 4).
- ¿Puede haber dos pares de números distintos que tengan el mismo m.c.m.?

2. Escribe cuatro múltiplos comunes de 6 y de 10.

¿Son esos números también múltiplos del m.c.m. (6, 10)?

3. ¿Son primos entre sí 8 y 9?

- Comprueba que su m.c.m. es igual a su producto.
- Completa en tu cuaderno esta frase y apréndela de memoria:

«Si dos números son primos entre sí, su m.c.d. es 1 y su m.c.m. es su... »

6. Cálculo del mínimo común múltiplo

Método de descomposición en producto de factores primos para calcular el m.c.m. de varios números.

m.c.m. (490, 300 y 480)

① Descomposición en factores

490	2
245	5
49	7
7	7
1	

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

480	2
240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$$490 = 2 \times 5 \times 7^2$$
$$300 = 2^2 \times 5^2 \times 3$$
$$480 = 2^5 \times 5 \times 3$$

② Cálculo del m.c.m.

$$490 = 2 \times 5 \times 7^2$$
$$300 = 2^2 \times 5^2 \times 3$$
$$480 = 2^5 \times 5 \times 3$$

m.c.m. (490, 300, 480) = $2^5 \times 5^2 \times 7^2 \times 3 = 117.600$

Vamos a calcular el m.c.m. de los números **490**, **300** y **480**.

Se procede del siguiente modo:

① Se descomponen los números en producto de factores primos:

$$490 = 2 \times 5 \times 7^2$$
$$300 = 2^2 \times 5^2 \times 3$$
$$480 = 2^5 \times 5 \times 3$$

Se escriben todos los factores comunes y no comunes que aparecen en las descomposiciones de los números dados. En este caso dichos factores son 2, 3, 5 y 7.

② Se forma el producto de estos factores elevando cada uno de ellos al mayor de los exponentes:

$$2^5 \times 5^2 \times 7^2 \times 3.$$

m.c.m. (490, 300, 480) = $2^5 \times 5^2 \times 7^2 \times 3 = 117.600$

Producto del m.c.m. y del m.c.d.

m.c.d. × m.c.m.

Múltiplos de 12 y 16

(12) = {0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...}
(16) = {0, 16, 32, 48, 64, ...}

Divisores de 12 y 16

D (12) = {1, 2, 3, 4, 6 y 12}
D (16) = {1, 2, 3, 4, 8 y 16}

m.c.m. (12, 16) = 48
m.c.d. (12, 16) = 4

$4 \times 48 = 12 \times 16$

m.c.d. (a, b) × m.c.m (a, b) = a × b

Observa los múltiplos y divisores de **12** y de **16**.

- El menor múltiplo común de 12 y 16 distinto de cero es 48:

m.c.m. (12, 16) = 48

- El máximo común divisor de 12 y 16 es 4.

m.c.d. (12, 16) = 4

Puedes comprobar que multiplicando los dos números 16 y 12 se obtiene el mismo resultado que al multiplicar el m.c.d. (4) por el m.c.m. (48).

$16 \times 12 = 192$ **$48 \times 4 = 192$**

En general, si **a** y **b** son dos números distintos de cero, se verifica:

m.c.d. (a, b) × m.c.m. (a, b) = a × b

Esta fórmula permite calcular el m.c.m. cuando se conoce el m.c.d. Así, si m.c.d. (24, 32) = 8, su m.c.m. será:

$$\text{m.c.m.} = \frac{24 \times 32}{\text{m.c.d. } (24,\ 32)} = \frac{24 \times 32}{8} = 96$$

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Recuerda que cuando un número es múltiplo de otro, el menor es el m.c.d. y el mayor el m.c.m.

Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes pares de números:

① 2 y 4	③ 6 y 4	⑤ 7 y 14	⑦ 10 y 4	⑨ 12 y 4	⑪ 12 y 6
② 3 y 6	④ 5 y 10	⑥ 10 y 8	⑧ 10 y 5	⑩ 12 y 3	⑫ 18 y 6

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes pares de números:

a) 148 y 156	c) 500 y 600	e) 72 y 81	g) 428 y 376	i) 500 y 1.000
b) 190 y 424	d) 150 y 180	f) 100 y 25	h) 600 y 200	j) 600 y 1.000

2. Calcula por el método de las divisiones sucesivas el m.c.d. (1.620, 980).

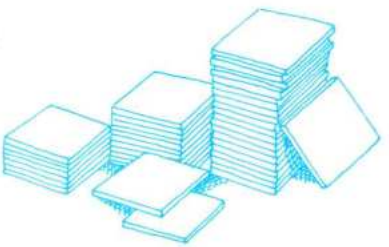
3. Aplicación del m.c.d. a la resolución de problemas.

EJEMPLO RESUELTO

Se quiere embaldosar una habitación de 16,20 m de larga por 9,80 m de ancha con baldosas cuadradas lo más grandes posible y enteras.

¿Cuál será la longitud del lado de cada baldosa?

La longitud en centímetros del lado de cada baldosa deberá ser un divisor común de 1.620 y 980. Como se quiere que las baldosas tengan la mayor superficie posible, habrá que hallar el m.c.d. de 1.620 y 980, que, según el ejercicio 2, es m.c.d. (1.620, 980) = **20.**



El lado de cada baldosa es 20 cm.

Una plancha de madera quiere aserrarse en cuadrados lo más grandes posible.

¿Cuánto podrá medir el lado de cada cuadrado si la longitud de la plancha es 96 cm y la anchura 72 cm?

4. Si m.c.d. (**a**, 30) = 15 ¿es **a** múltiplo de 15? ¿Y de 3? ¿Es **a** múltiplo de 30?

5. Si m.c.d. (**a**, **b**) = 4 ¿cómo son las divisiones **a** : 4 y **b** : 4?

6. Si **a** = **b** ¿cuál es el m.c.d. (**a**, **b**)? ¿Y el m.c.m. (**a**, **b**)?

7. Si **a** y **b** son primos entre sí ¿cuál es el m.c.d. (**a**, **b**)? ¿Y el m.c.m. (**a**, **b**)?

8. Calcula m.c.m. (450, 250, 600).

9. Aplicación del m.c.m. a la resolución de problemas.

EJEMPLO RESUELTO

Una sirena toca cada 450 segundos, otra cada 250 segundos y una tercera cada 600 segundos.

Si a las 4 de la mañana han coincidido tocando las tres ¿a qué hora volverán a tocar otra vez juntas?

El tiempo en segundos que tardarán en volver a tocar juntas las tres sirenas es: m.c.m. (450, 250, 600) = 9.000, según el ejercicio 8.

Las tres sirenas coincidieron al cabo de 9.000 s. = 150 min. = **2 horas 30 minutos.**

Es decir, a las **seis y media** de la mañana.

Desde las 4 a las 6,30 la primera sirena ha tocado 9.000 : 450 = 20 veces.

¿Cuántas veces ha tocado en este tiempo la segunda sirena? ¿Y la tercera?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Un barco A sale de un puerto cada 48 días y un barco B sale del mismo puerto cada 40 días. El 12 de marzo coincidieron ambos barcos en el puerto.

¿Qué día volverán a coincidir?

2. Un faro se enciende cada 12 segundos, otro cada 18 segundos y un tercero cada minuto. A las 6,30 de una tarde los tres coinciden.

Averigua las veces que volverán a coincidir en los cinco minutos siguientes.

3. El suelo de una habitación tiene 5 m de largo y 3 m de ancho. Se quiere embaldosar.

Calcula el lado de la baldosa tal que el número de baldosas que se coloque sea mínimo y que no haga falta cortar ninguna de ellas.

4. Un almacenista tiene 75 kg de café de la clase A, 105 kg de la clase B y 120 kg de la clase C. Para servir a sus clientes quiere hacer paquetes iguales de mezcla, de modo que en cada paquete entre el menor número posible de kilogramos juntos de cada clase. Se desea saber los paquetes que puede hacer y sus composiciones.

5. Un viajero va a Barcelona cada 18 días y otro cada 24 días. Hoy han estado los dos en Barcelona.

¿Dentro de cuántos días volverán a estar los dos a la vez en Barcelona?

6. La longitud del neumático delantero de una bicicleta mide 60 cm y el trasero 175. Se señalan con tiza los puntos de los dos neumáticos que tocan el suelo y se hace andar la bicicleta.

¿Cuánto debe avanzar como mínimo la bicicleta para que coincidan las dos señales a la vez en el suelo?

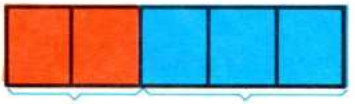
7. ¿Cuánto mide la mayor baldosa cuadrada que cabe un número exacto de veces en una sala de 8 m de longitud y 6,4 m de anchura?

TEMA 8 FRACCIONES

1. Concepto de fracción

$\frac{3}{4}$

$\frac{3}{8}$



$\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$

Fracción → $\frac{3}{5}$ Numerador, Denominador

Fracción y sus términos.

Observa las siguientes figuras:

- La jarra está llena de leche hasta los $\frac{3}{4}$
- Se han coloreado de rojo los $\frac{3}{8}$ del cuadrado.
- Los $\frac{2}{5}$ del rectángulo están coloreados de marrón y los $\frac{3}{5}$ restantes están coloreados de azul.

$\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ son **fracciones**

En la fracción $\frac{3}{5}$ el **3** es el **numerador** y el **5** el **denominador**.

Una o varias partes iguales en que se divide la unidad es una fracción.

- **El denominador indica las partes iguales en que se divide la unidad.**
- **El numerador representa las partes de la unidad que se toman o que se consideran.**

1. Escribe la fracción que representa la parte coloreada en cada figura.

2. Completa en tu cuaderno los dibujos hasta la unidad.

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{7}$

3. Observa este círculo y la parte rayada del mismo.

¿Se han rayado $\frac{2}{3}$ del círculo? ¿Cómo lo sabes?

4. Escribe siete fracciones de denominador 9 y otras siete de numerador 6.

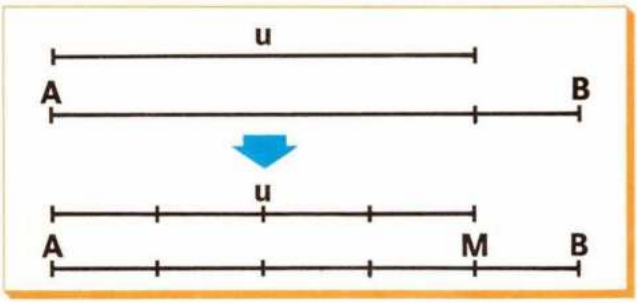
5. Escribe las siguientes fracciones:

a) siete onceavos b) nueve veinteavos c) tres décimos

6. Se han coloreado los $\frac{2}{5}$ de un segmento.

¿Qué significa el denominador 5? ¿Y el numerador 2?

2. La fracción como medida y como cociente



La fracción como resultado de una medida.

Al tratar de medir el segmento $\overline{AB}$ tomando como unidad de medida el segmento $\overline{u}$, se observa que $\overline{AB}$ contiene una vez el segmento $\overline{u}$ y sobra un trozo.

Si la unidad de medida $\overline{u}$ se divide en cuatro partes iguales se observa que el segmento $\overline{AB}$ contiene cinco de estas partes. La medida del segmento $\overline{AB}$ con la unidad $\overline{u}$ es $\frac{5}{4}$

Una fracción se puede interpretar como la medida exacta de una cantidad.
El denominador indica las partes iguales en que se divide la unidad de medida.
El numerador indica las partes que contiene la cantidad medida.

La fracción como cociente exacto de dos números.

Los tres niños se han repartido dos pasteles a partes iguales. Cada uno recibe $\frac{2}{3}$ de pastel.

Por eso la fracción $\frac{2}{3}$ es el cociente exacto de dividir 2 entre 3, es decir, $2 : 3 = \frac{2}{3}$

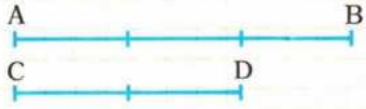
En una división **a : b** el divisor **b** no puede ser cero.

Por eso en una fracción $\frac{a}{b}$ el denominador **b** ha de ser distinto de cero ($b \neq 0$).

Una fracción se puede interpretar como el cociente exacto de dividir el numerador entre el denominador.
El denominador de una fracción ha de ser un número distinto de cero.

1. Contesta:

a) ¿Cuál es la medida del segmento $\overline{AB}$ si se toma como unidad el segmento $\overline{CD}$?



b) ¿Cuál es la medida del segmento $\overline{CD}$ si se toma como unidad el segmento $\overline{AB}$?

2. Escribe en forma de fracción:

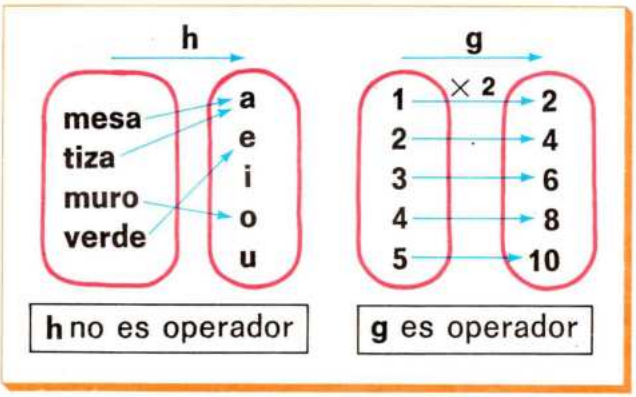
3 : 5 5 : 7 8 : 13 17 : 30 4 : 3

3. ¿Cuáles de las siguientes expresiones no son fracciones?

$\frac{0}{3}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{0}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{0}$ $\frac{8}{5}$

3. Operadores. Cadena de operadores

Operadores de multiplicar y de dividir.



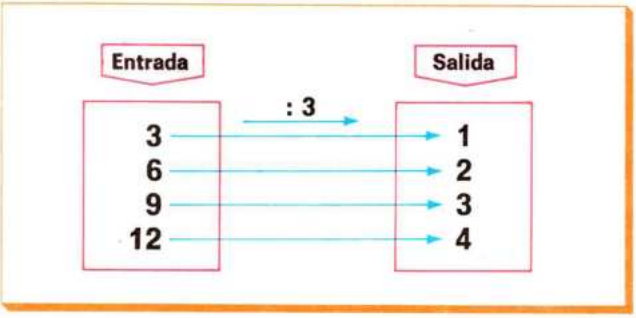
Observa las aplicaciones **h** y **g**.

- El criterio de formación de la aplicación **h** es «... termina en la vocal...»
- El criterio de formación de la aplicación **g** es «... multiplica por 2»

La aplicación **g**, cuyo criterio de formación viene dado mediante una operación, se llama **operador.**

El operador **× 2** actúa sobre los números multiplicándolos por 2.

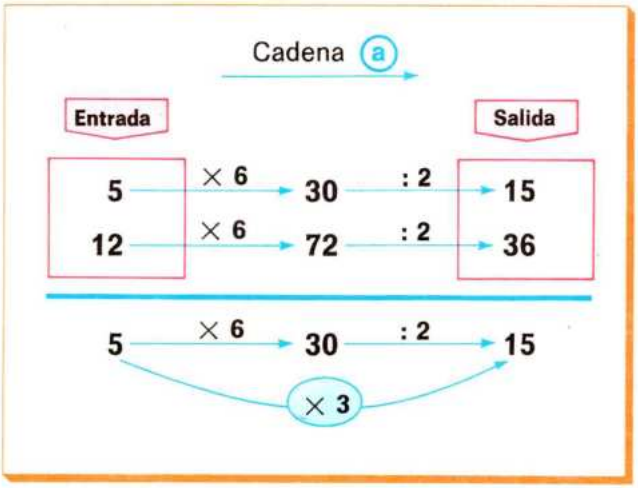
La aplicación **h** no es un operador.



Observa que el operador **: 3** actúa sobre los números dividiéndolos por 3.

Un operador, por ejemplo : 3, se puede imaginar como una máquina que divide por 3 a cada número que entra en ella.

Cadena de operadores.



Los operadores, como las máquinas, pueden actuar sucesivamente, de modo que el resultado que sale de un operador entra en otro. Así se forma una **cadena de operadores.**

Observa que la cadena (a) actúa multiplicando por 6 y dividiendo por 2.

En ocasiones se pueden sustituir dos o más operadores por un solo operador que produce el mismo efecto.

Así el operador × 3 puede sustituir a los dos operadores de la cadena (a) porque **3 = 6 : 2,** es decir, 6 es múltiplo de 2.

1. Completa en tu cuaderno la entrada o la salida, según corresponda.

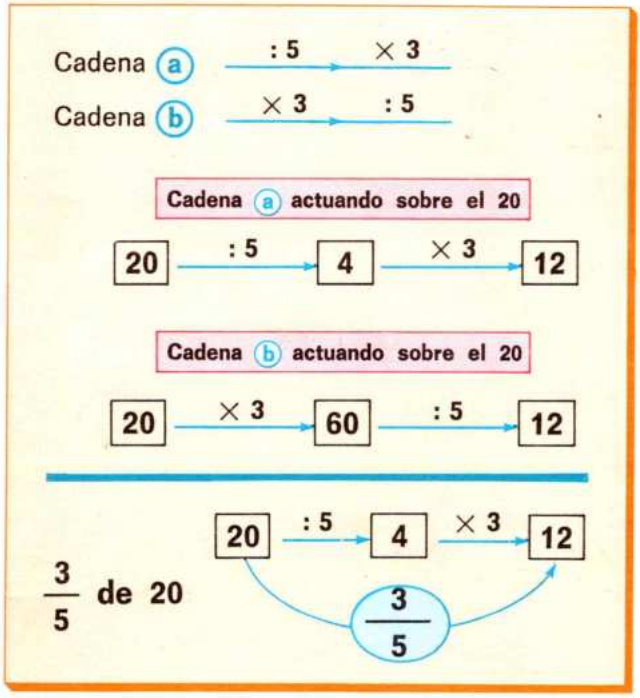
134 $\xrightarrow{\times 5}$ ☐ 1.135 $\xrightarrow{: 5}$ ☐ 9.642 $\xrightarrow{: 3}$ ☐

☐ $\xrightarrow{\times 12}$ 48 ☐ $\xrightarrow{: 4}$ 781 ☐ $\xrightarrow{\times 6}$ 72

2. Completa la salida 53 $\xrightarrow{\times 1}$ ☐

Al operador × 1 se le llama operador neutro. ¿Por qué se le da este nombre?

4. Las fracciones como operadores



Cómo actúan las fracciones sobre los números.

Observa las cadenas (a) y (b), cada una de ellas con dos operadores.

Las dos cadenas producen el mismo efecto al actuar sobre los números; por eso las cadenas (a) y (b) son **cadenas equivalentes.**

En estas cadenas no es posible sustituir los operadores de multiplicar × 3 y de dividir : 5 por un solo operador con números naturales, porque ninguno de estos operadores es múltiplo del otro.

Cada una de estas cadenas es un **operador fraccionario** o **fracción** y se representa por $\frac{3}{5}$

El operador $\frac{3}{5}$ sobre un número o cantidad hace dos cosas:

- multiplica por 3
- y divide por 5.

Ejemplo $\frac{3}{5}$ de 20 $\begin{cases} 3 \times 20 = \mathbf{60}. \\ 60 : 5 = \mathbf{12}. \end{cases}$

Una fracción se puede interpretar como un operador que actúa sobre los números o sobre las cantidades y hace dos cosas: multiplica por el numerador y divide por el denominador.

1. Calcula:

a) $\frac{2}{3}$ de 60 b) $\frac{2}{5}$ de 20 c) $\frac{3}{4}$ de 100 d) $\frac{1}{3}$ de 90

2. Completa:

Entrada $\xrightarrow{\frac{3}{4}}$ Salida

40 $\xrightarrow{\frac{3}{4}}$ 30 60 $\xrightarrow{\frac{2}{5}}$ □ 60 $\xrightarrow{\frac{5}{6}}$ □

3. ¿Cómo se calcula un número cuando se conoce una fracción de ese número?

EJEMPLO RESUELTO

En el ejercicio anterior se trataba de hallar el número de la salida. Observa cómo se calcula el número de la entrada.

Los $\frac{3}{5}$ de un número es 45. ¿Cuál es ese número?

Entrada $\xrightarrow{\frac{3}{5}}$ Salida

□ $\xrightarrow{\frac{3}{5}}$ 45

45 : 3 = 15
15 × 5 = **75**

75 $\xrightarrow{\frac{3}{5}}$ **45**

Calcula la entrada:

□ $\xrightarrow{\frac{2}{3}}$ 60 □ $\xrightarrow{\frac{2}{5}}$ 30 □ $\xrightarrow{\frac{3}{4}}$ 30

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula:

① $\frac{1}{3}$ de 6 ③ $\frac{1}{4}$ de 12 ⑤ $\frac{1}{5}$ de 20 ⑦ $\frac{1}{4}$ de 20

② $\frac{1}{10}$ de 20 ④ $\frac{1}{1}$ de 30 ⑥ $\frac{1}{3}$ de 30 ⑧ $\frac{1}{6}$ de 30

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

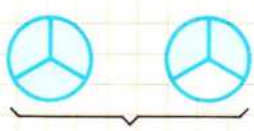
1. Las fracciones que tienen iguales el numerador y el denominador son iguales a la unidad:

$\frac{2}{2} = 1$ $\frac{3}{3} = 1$ $\frac{6}{6} = 1$ $\frac{10}{10} = 1$

Las fracciones que tienen el numerador menor que el denominador son menores que la unidad:

$\frac{3}{4} < 1$ $\frac{2}{3} < 1$ $\frac{5}{6} < 1$ $\frac{8}{9} < 1$

Las fracciones que tienen el numerador mayor que el denominador son mayores que la unidad y se pueden calcular los enteros que contienen estas fracciones dividiendo el numerador entre el denominador:



$\frac{5}{3}$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$ Entero

$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

Indica de las siguientes fracciones las que son iguales, menores o mayores que la unidad:

$\frac{6}{6}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{7}{3}$

2. Escribe las siguientes fracciones mayores que la unidad como suma de un entero y de una fracción:

$\frac{4}{3}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{9}{5}$ $\frac{11}{6}$ $\frac{21}{10}$

3. Los $\frac{3}{5}$ de un número es 15. ¿Cuál es el número?

Para resolver el problema completa: $\frac{3}{5}$ de $\square = 15$.

4. En una clase hay 45 alumnos, de los cuales $\frac{2}{3}$ son chicos.

¿Cuántos chicos hay? ¿Y chicas?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Reducciones

EJEMPLO RESUELTO

Reduce $\frac{13}{60}$ de hora a minutos.

$\frac{13}{60}$ de hora a minutos $\rightarrow \frac{13}{60}$ de hora $= \frac{13}{60}$ de 60 minutos $= \frac{13 \times 60}{60} =$ **13 minutos**

Reduce:

a) $\frac{7}{12}$ de año a meses

b) $\frac{7}{100}$ de peseta en céntimos

c) $\frac{7}{24}$ de día a horas

d) $\frac{23}{5}$ de duro a pesetas

2. De una caja de huevos se han roto 8, que son los $\frac{2}{5}$ de los que había.
¿Cuántos huevos contenía la caja?

3. Antonio gasta $\frac{3}{4}$ de su dinero y le quedan 128 ptas. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

4. Luis tiene 600 ptas. para el fin de semana. El sábado gasta $\frac{2}{5}$ y el domingo $\frac{2}{3}$ de lo que le quedaba.
¿Cuánto dinero gastó el sábado? ¿Y el domingo? ¿Cuánto le queda?

5. Un albañil hace un muro en cinco días. Si cada día hace el mismo trabajo, ¿qué fracción de muro hace en un día? ¿Y en tres días?

6. En el siguiente gráfico se han representado los resultados de los exámenes de los 1.200 alumnos de un colegio.

azul → suficiente
rojo → insuficiente
gris → notable
amarillo → sobresaliente
blanco → bien

Calcula el número de alumnos que obtuvieron cada una de las notas indicadas.

7. He recorrido 15 km Esto representa los $\frac{3}{7}$ de un camino que hay que recorrer.
¿Cuánto mide el camino?

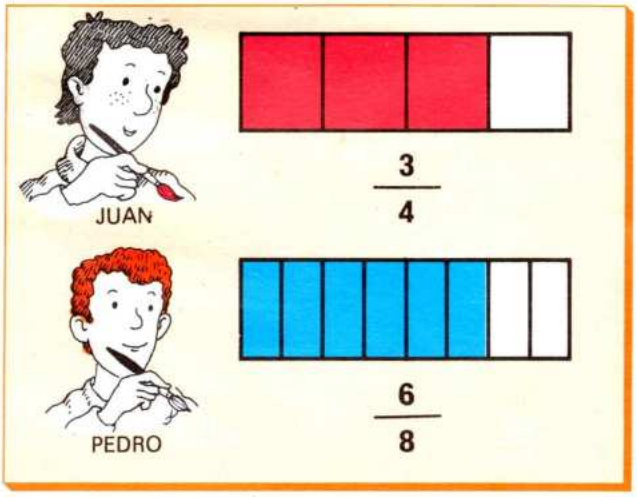
8. En una bolsa hay 60 canicas: $\frac{1}{6}$ son rojas; $\frac{3}{4}$ son azules; el resto son blancas.
¿Cuántas canicas hay de cada clase?

9. Una cuerda de 36 metros se ha cortado en dos trozos. Uno mide los $\frac{2}{3}$ del total.
¿Cuántos metros mide cada trozo?

TEMA 9 FRACCIONES Y NÚMEROS RACIONALES

1. Fracciones equivalentes

Concepto de fracciones equivalentes.



$\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{6}{8}$

Toma un folio o tira de papel. Divídelo en cuatro partes iguales y colorea tres partes de rojo, como hace Juan.

Toma otro folio. Divídelo en ocho partes iguales y colorea seis partes de azul, como hace Pedro.

¿Qué fracción de folio has coloreado de rojo?

¿Qué fracción de folio has coloreado de azul?

Coloca un folio sobre el otro. ¿Son iguales las partes coloreadas en ambos folios?

Las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ son equivalentes.

Como las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ son equivalentes, producen el mismo efecto al actuar sobre un número.

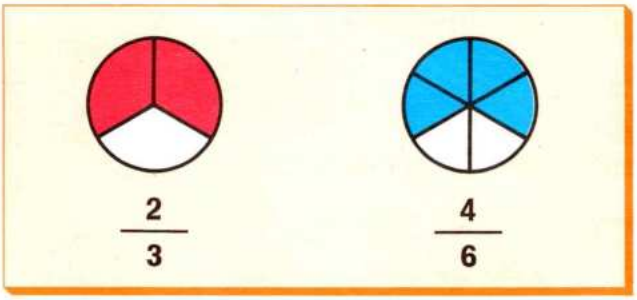
$$\frac{3}{4} \text{ de } 12 = \frac{3 \cdot 12}{4} = 9$$

$$\frac{6}{8} \text{ de } 12 = \frac{6 \cdot 12}{8} = 9$$

Fíjate cómo al actuar las dos fracciones sobre 12 da el mismo resultado: **9.**

Dos fracciones son equivalentes si al actuar sobre un mismo número da el mismo resultado.

Criterio general de equivalencia.



$\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{4}{6}$

¿Qué fracción de círculo hay pintada de rojo?

¿Qué fracción de círculo hay pintada de azul?

¿Son iguales de grandes las dos partes coloreadas en ambos círculos?

Las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ también son equivalentes.

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{6}$$

$$2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$$

Observa que si se multiplican en cruz los términos de estas fracciones, se obtiene el mismo resultado.

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si al multiplicar sus términos en cruz se obtiene el mismo resultado: $a \cdot d = b \cdot c$.

Actividades

1. Indica cuáles de los siguientes pares de fracciones son equivalentes:

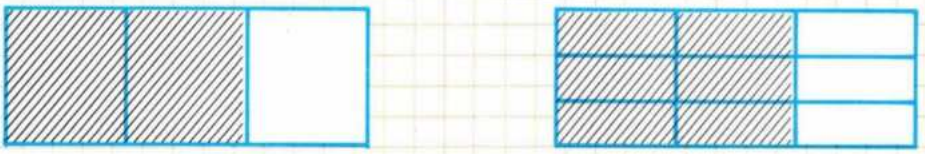
a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$ b) $\frac{3}{5}$ y $\frac{15}{25}$ c) $\frac{7}{11}$ y $\frac{21}{33}$ d) $\frac{4}{9}$ y $\frac{2}{3}$

2. Las fracciones $\frac{3}{7}$ y $\frac{6}{14}$ dan el mismo resultado al aplicarlas a 28:

$\frac{3}{7}$ de $28 = \frac{3 \cdot 28}{7} = 12$ $\frac{6}{14}$ de $28 = \frac{6 \cdot 28}{14} = 12$

¿Cómo son los productos cruzados en estas fracciones? ¿Son fracciones equivalentes?

3. Observa estas figuras:



¿Qué fracciones representan las partes rayadas?

4. Comprueba que las fracciones $\frac{0}{5}$ y $\frac{0}{8}$ son equivalentes.

5. Comprueba que toda fracción $\frac{a}{b}$ es equivalente a sí misma.

6. De las siguientes fracciones escribe agrupadas las que sean equivalentes:

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{10}{25}$ $\frac{9}{27}$ $\frac{4}{12}$

7. Cálculo de un término de una fracción equivalente a otra dada.

EJEMPLO RESUELTO

¿Cuál es la fracción equivalente a $\frac{5}{6}$ que tiene por denominador 18?

$\frac{5}{6} = \frac{x}{18}$

Al multiplicar en cruz sus términos da el mismo resultado:

$5 \cdot 18 = 6 \cdot x$

$90 = 6 \cdot x \longrightarrow x = \frac{90}{6} = 15$

La fracción buscada es $\frac{15}{18}$, puesto que $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

¿Cuál es la fracción equivalente a $\frac{4}{5}$ que tiene por denominador 10?

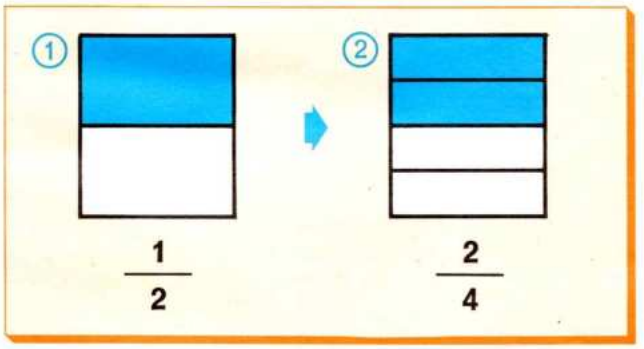
8. ¿Cuál es la fracción equivalente a $\frac{4}{5}$ que tiene por numerador 24?

9. ¿Cuál es la fracción equivalente a $\frac{6}{8}$ que tiene por numerador 54?

¿Y la que tiene por numerador 3?

2. Obtención de fracciones equivalentes

Fracciones equivalentes por amplificación.



① Dobla un folio o cuartilla por la mitad y colorea una mitad. ¿Qué fracción representa la parte coloreada?

② Vuelve a doblar por la mitad cada una de las partes. ¿Qué fracción representa ahora la parte coloreada?

¿Son equivalentes las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$?

Las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son equivalentes, porque $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

Fracciones amplificadas

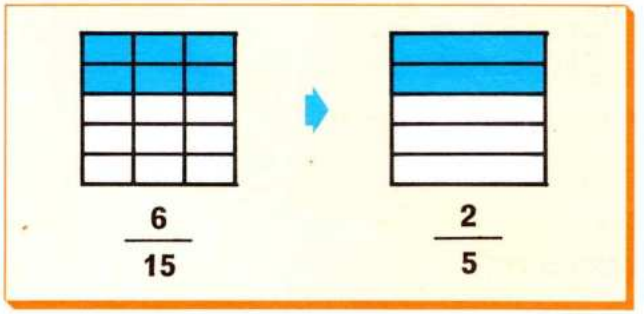
Observa que $\frac{2}{4} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}$

La fracción $\frac{2}{4}$ se obtiene a partir de $\frac{1}{2}$ multiplicando por 2 el numerador y el denominador.

La fracción $\frac{2}{4}$ se ha obtenido por amplificación de la fracción $\frac{1}{2}$

Si se multiplican el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número distinto de cero se obtiene una fracción equivalente llamada fracción amplificada.

Fracciones equivalentes por simplificación.



Las fracciones $\frac{6}{15}$ y $\frac{2}{5}$ son equivalentes, porque $6 \cdot 5 = 2 \cdot 15$.

$$\frac{6}{15} = \frac{6:3}{15:3} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$$

Fracciones simplificadas

Observa que $\frac{2}{5} = \frac{6:3}{15:3}$

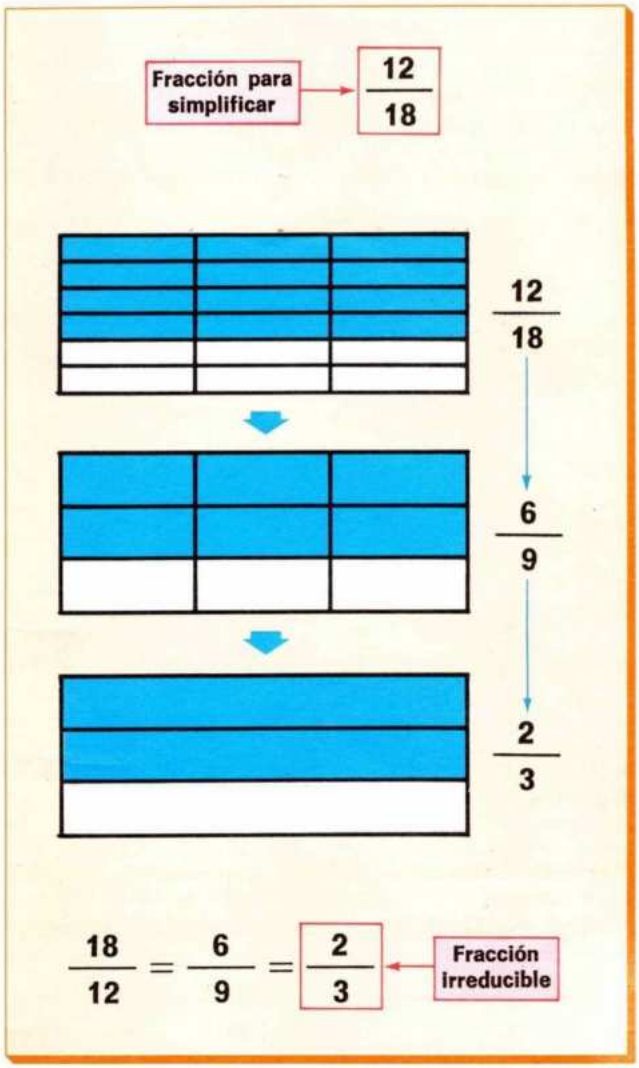
La fracción $\frac{2}{5}$ se puede obtener a partir de $\frac{6}{15}$ dividiendo por 3 el numerador y el denominador.

La fracción $\frac{2}{5}$ se ha obtenido por simplificación de la fracción $\frac{6}{15}$

Si se dividen el numerador y el denominador de una fracción por un divisor de ambos se obtiene una fracción equivalente llamada fracción simplificada.

3. Fracción irreducible

Concepto de fracción irreducible.



Vamos a simplificar la fracción $\frac{12}{18}$

Para simplificar esta fracción se dividen el numerador y el denominador por un divisor común.

Como el 2 y el 3 son divisores comunes de 12 y 18, se tiene:

$$\frac{12}{18} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$

Primera simplificación — Segunda simplificación

La fracción $\frac{2}{3}$ no puede simplificarse más y se dice que es una **fracción irreducible.**

Si el numerador y el denominador están descompuestos en productos, para simplificar la fracción se eliminan los mismos factores en ambos términos:

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{3}{7} \qquad \frac{2^3}{2^3 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Una fracción $\frac{a}{b}$ se llama irreducible si sus términos no tienen ningún divisor común excepto el 1.

1. Simplifica hasta llegar a una fracción irreducible:

a) $\frac{60}{90}$ b) $\frac{36}{48}$ c) $\frac{90}{36}$ d) $\frac{64}{64}$ e) $\frac{84}{124}$ f) $\frac{18}{72}$

2. Simplifica:

a) $\frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 3}$ b) $\frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5}$ c) $\frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 2}$ d) $\frac{2^3 \cdot 7}{2^2}$ e) $\frac{2^3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3}$

3. ¿Cuáles de las siguientes fracciones son irreducibles?

a) $\frac{13}{15}$ b) $\frac{18}{21}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{16}{19}$ e) $\frac{12}{27}$

4. Simplificación de fracciones

Método del máximo común divisor.

Fracción dada → $\frac{12}{18}$

OBTENCIÓN DEL m.c.d.

12	2
6	2
3	3
1	

18	2
9	3
3	3
1	

$$12 = 2^2 \cdot 3$$
$$18 = 2 \cdot 3^2$$

m.c.d. (12, 18) = 2 · 3 = 6

$$\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$$ ← Fracción irreducible

- Acabamos de ver que se puede obtener la fracción irreducible equivalente a la fracción $\frac{12}{18}$ mediante dos simplificaciones: primero dividiendo por 2 y luego dividiendo por 3.
- También se puede obtener la fracción irreducible mediante una sola simplificación. Para ello se dividen 12 y 18 por su máximo común divisor:

m.c.d. (12, 18) = 6

$$\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$$

La fracción $\frac{2}{3}$ es irreducible y equivalente a $\frac{12}{18}$

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Para simplificar directamente una fracción y obtener su fracción irreducible, se dividen los dos términos de la fracción dada por el máximo común divisor de ambos términos.

1. Simplifica las siguientes fracciones hasta conseguir una fracción irreducible:

a) $\frac{36}{27}$ b) $\frac{48}{56}$ c) $\frac{75}{100}$ d) $\frac{48}{72}$ e) $\frac{110}{330}$

2. Simplifica:

a) $\frac{400}{600}$ b) $\frac{200}{800}$ c) $\frac{240}{360}$ d) $\frac{500}{600}$ e) $\frac{1000}{2000}$

3. Simplifica la fracción $\frac{a}{b}$ si $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $b = 2^4 \cdot 3$.

4.

EJEMPLO RESUELTO

Luis ha perdido 4 de las 12 canicas que tenía. ¿Qué fracción de sus canicas ha perdido?

$$\frac{4}{12} = \frac{4:4}{12:4} = \frac{1}{3}$$

Ha perdido $\frac{1}{3}$ de sus canicas.

Se reparten 12 pasteles entre 18 personas. ¿Qué fracción de pastel corresponde a cada una?

5. Reducción de fracciones a común denominador

Fracciones con denominador común.

Fracciones con denominador común → $\frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{8}{6}$

Fracciones con distinto denominador → $\frac{4}{5}, \frac{3}{12}, \frac{22}{6}, \frac{4}{15}$

Para comparar fracciones y para hacer algunas operaciones con ellas, se necesita que estas fracciones tengan todas el mismo denominador.

Hay varias maneras para reducir fracciones a común denominador.

Método de los productos cruzados.

① $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{48}{72}$

② $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{6 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{60}{72}$

③ $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{54}{72}$

Fracciones reducidas a común denominador → $\frac{48}{72}, \frac{60}{72}, \frac{54}{72}$

Las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{4}$ tienen distinto denominador.

Observa lo que se hace para reducirlas a común denominador:

① Multiplica los dos términos de la fracción $\frac{2}{3}$ por los denominadores de las otras dos (6 y 4).

② Multiplica los dos términos de la fracción $\frac{5}{6}$ por los denominadores de las otras dos (3 y 4).

③ Multiplica los dos términos de la fracción $\frac{3}{4}$ por los denominadores de las otras dos (6 y 3).

Para reducir fracciones a común denominador se multiplican los dos términos de cada fracción por el producto de los denominadores de las demás.

Método del mínimo común múltiplo.

Este método consiste en tomar como denominador común el mínimo común múltiplo de los denominadores.

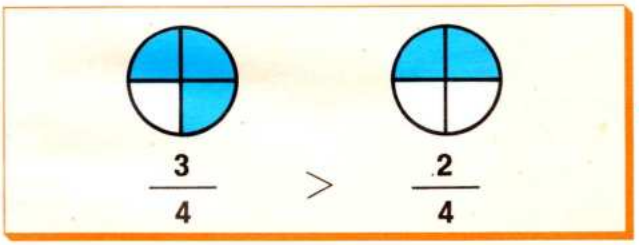
Para reducir las fracciones anteriores se opera así:

Fracciones dadas	Denominadores	Múltiplos	m.c.m.	Fracciones equivalentes con el mismo denominador
$\frac{2}{3}$	3	{0, 3, 6, 9, (12), 15, ...}	12	$12 : 3 = 4 \rightarrow 4 \cdot 2 = 8$; $\frac{8}{12}$ es equivalente a $\frac{2}{3}$
$\frac{5}{6}$	6	{0, 6, (12), 18, ...}		$12 : 6 = 2 \rightarrow 2 \cdot 5 = 10$; $\frac{10}{12}$ es equivalente a $\frac{5}{6}$
$\frac{3}{4}$	4	{0, 4, 8, (12), 16, 20, ...}		$12 : 4 = 3 \rightarrow 3 \cdot 3 = 9$; $\frac{9}{12}$ es equivalente a $\frac{3}{4}$

Para reducir fracciones a común denominador se simplifican primero y se toma como denominador común el m.c.m. de los denominadores. Después se multiplica cada numerador por el cociente de dividir el m.c.m. por el denominador respectivo.

6. Comparación de fracciones

Comparar fracciones de igual denominador.



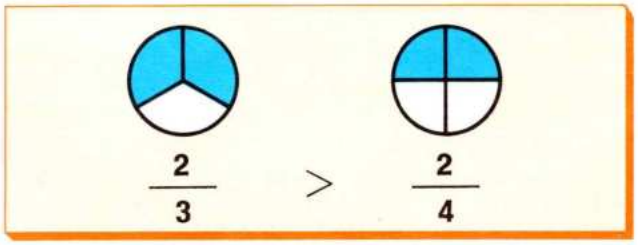
¿Qué fracción es mayor, $\frac{3}{4}$ ó $\frac{2}{4}$?

Observa que $\frac{3}{4}$ de círculo es mayor que $\frac{2}{4}$ de círculo:

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$$

De dos fracciones que tienen igual denominador, es mayor la que tiene mayor el numerador.

Comparar fracciones de igual numerador.



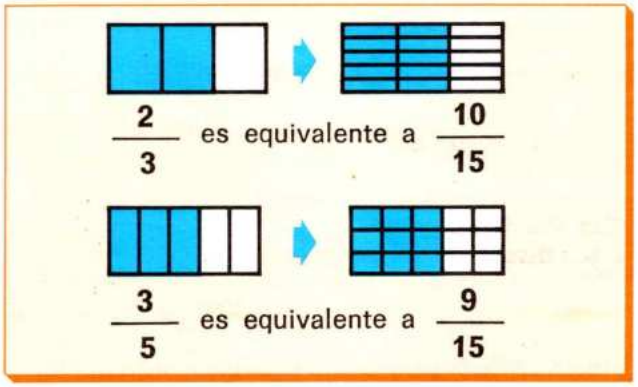
¿Qué fracción es mayor, $\frac{2}{3}$ ó $\frac{2}{4}$?

Observa que $\frac{2}{3}$ de círculo es mayor que $\frac{2}{4}$ de círculo:

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{4}$$

De dos fracciones que tienen igual numerador, es mayor la que tiene menor el denominador.

Comparar fracciones de distinto numerador y distinto denominador.



¿Qué fracción es mayor, $\frac{2}{3}$ ó $\frac{3}{5}$?

Como estas fracciones tienen distintos los denominadores, buscamos dos fracciones equivalentes a las dadas pero que tengan el mismo denominador:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15} \qquad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15}$$

Como $\frac{10}{15}$ es mayor que $\frac{9}{15}$ resulta que

$$\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$$

Para comparar fracciones de distinto denominador, se reduce a común denominador, siendo mayor la fracción que tiene mayor numerador.

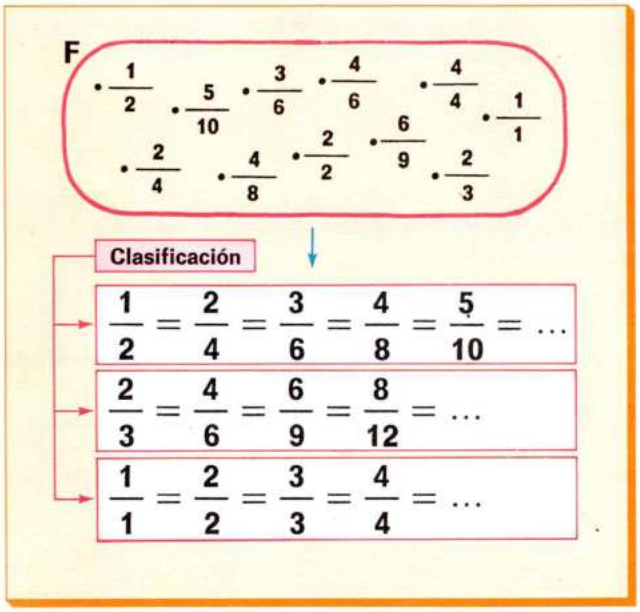
1. Indica la fracción mayor en cada caso:

a) $\frac{7}{9}$ ó $\frac{8}{9}$ b) $\frac{7}{13}$ ó $\frac{7}{15}$ c) $\frac{3}{4}$ ó $\frac{4}{5}$ d) $\frac{7}{9}$ ó $\frac{9}{10}$

2. Ordena de mayor a menor.

$$\frac{5}{9} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{5}{1} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{5}{4}$$

7. El conjunto $\mathbb{Q}^+$ de los números racionales positivos



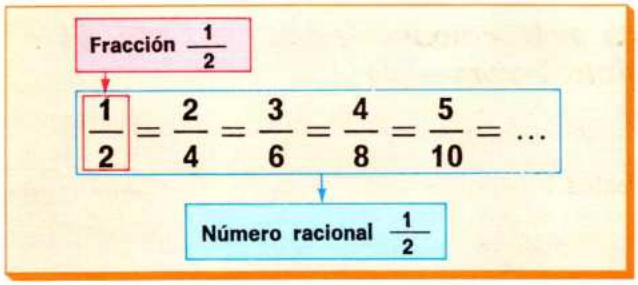
Números racionales positivos.

Si en el conjunto **F** de todas las fracciones positivas agrupamos todas las fracciones que son equivalentes, el conjunto **F** queda descompuesto en subconjuntos o clases de fracciones, es decir, queda clasificado.

Cada uno de estos subconjuntos o clases de fracciones equivalentes es un **número racional.**

- El número racional $\frac{1}{2}$ está formado por la fracción $\frac{1}{2}$ y todas sus equivalentes.
- El número racional $\frac{2}{3}$ está formado por la fracción $\frac{2}{3}$ y todas sus equivalentes, etc.

Un número racional cualquiera está formado por una fracción y todas sus equivalentes.



El conjunto $\mathbb{Q}^+$ de los números racionales positivos.

Tienes que tener cuidado para no confundir número racional con fracción.

Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{2}$ no es lo mismo que el número racional $\frac{1}{2}$, pues éste está formado por la fracción $\frac{1}{2}$ y todas sus equivalentes.

Un número racional es una fracción y todas sus equivalentes.
Al conjunto de los números racionales positivos se le designa por $\mathbb{Q}^+$.

El conjunto $\mathbb{N}$ como subconjunto de $\mathbb{Q}^+$.

El número natural 2 se puede identificar con el número racional $\frac{2}{1}$, es decir, $\mathbf{2 = \frac{2}{1}}$

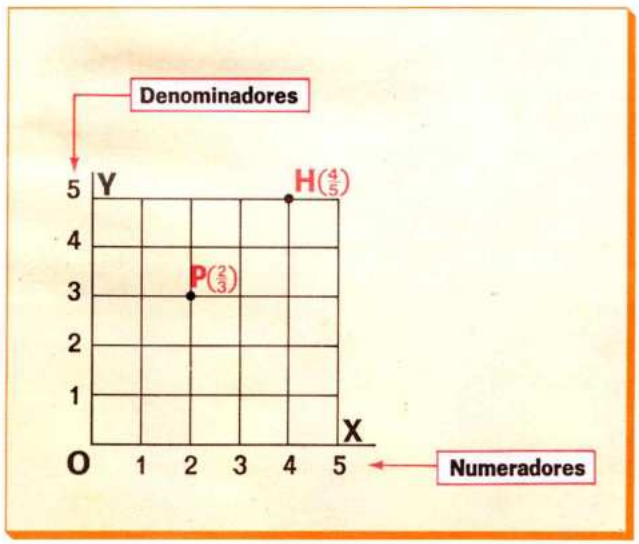
En general, si **a** es un número natural, se identifica con el número racional $\frac{a}{1}$; es decir, $\mathbf{a = \frac{a}{1}}$

Por esta razón, todos los números naturales son también números racionales.

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un subconjunto del conjunto $\mathbb{Q}^+$ de los números racionales positivos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+$.

8. Representación gráfica de fracciones y números racionales positivos

Representación de fracciones.



En una cuadrícula como la de la figura, se pueden representar las fracciones.

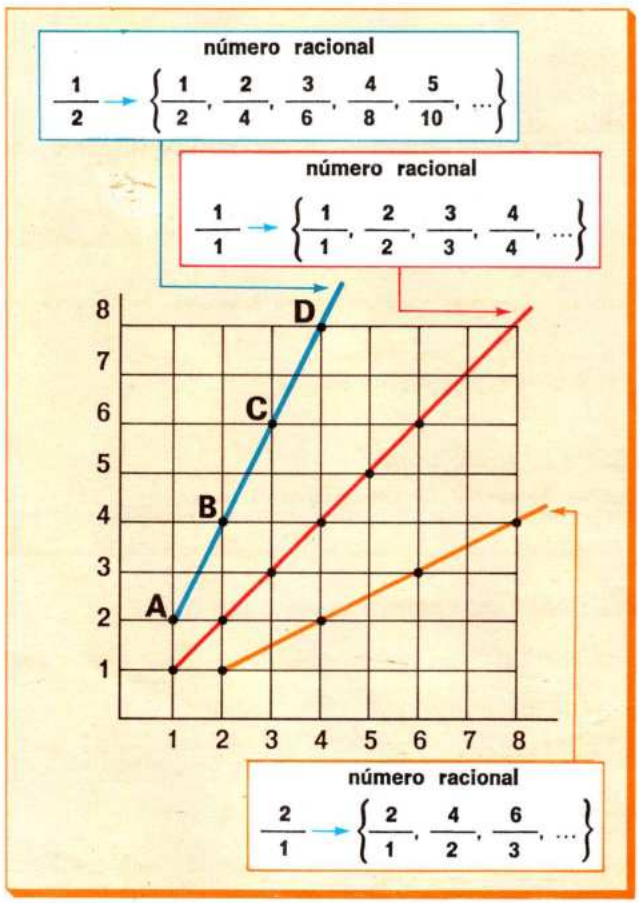
Observa cómo se representa la fracción $\frac{2}{3}$

Para ello se lleva el numerador 2 sobre la semirrecta horizontal **OX**, y el denominador 3 sobre la semirrecta vertical **OY**.

Con este par de números (2, 3) queda determinado el punto **P**. Diremos que la fracción $\frac{2}{3}$ está representada por el punto **P**.

Análogamente, la fracción $\frac{4}{5}$ está representada por el punto **H**.

Representación de números racionales positivos.



Observa que los puntos **A, B, C** y **D**, que representan a las fracciones equivalentes $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ y $\frac{4}{8}$ del número racional $\frac{1}{2}$, están sobre la semirrecta azul.

- Del mismo modo, el número racional $\frac{1}{1}$ está representado por puntos que están sobre la semirrecta roja.
- Finalmente el número racional $\frac{2}{1}$ está representado por puntos que están sobre la semirrecta amarilla.

En un cuadriculado cada fracción está representada por un punto y cada número racional positivo está representado por puntos que están en una semirrecta.

Actividades

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Indica las parejas de fracciones que son equivalentes:

① $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ ② $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ ③ $\frac{2}{3}$ y $\frac{6}{9}$ ④ $\frac{2}{5}$ y $\frac{20}{50}$

2. Simplifica las siguientes fracciones:

① $\frac{4}{6}$ ② $\frac{2}{4}$ ③ $\frac{3}{6}$ ④ $\frac{10}{50}$ ⑤ $\frac{30}{40}$ ⑥ $\frac{5}{10}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Reduce a común denominador:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}$

2. Expresa la fracción $\frac{2}{3}$ con denominador 240.

3. Comprueba que $\frac{8}{10}$ y $\frac{4}{5}$ son equivalentes y después redúcelos a común denominador.
¿Cómo son las fracciones que resultan?

4. ¿Qué ocurre cuando se reducen a común denominador dos fracciones equivalentes?

5. Escribe todos los valores que se pueden dar al número **n** para que la fracción $\frac{n}{15}$ sea irreducible y menor que la unidad.

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

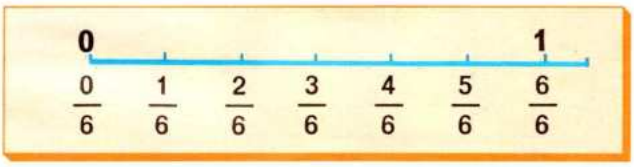
1. Un padre reparte entre sus hijos 1.800 ptas. Al mayor le da $\frac{4}{9}$ de esta cantidad, al mediano $\frac{1}{3}$ y al menor el resto.
¿Qué cantidad recibió cada uno? ¿Qué fracción del dinero recibió el tercero?

2. Una caja contiene 90 tornillos:
$\frac{5}{15}$ del total son grandes $\frac{1}{3}$ del total son medianos $\frac{6}{18}$ del total son pequeños
¿Cuántos tornillos hay de cada clase?

3. Dos automóviles **A** y **B** hacen un mismo trayecto de 572 km. El automóvil **A** lleva recorridos los $\frac{5}{11}$ del trayecto cuando el **B** ha recorrido los $\frac{6}{13}$ del mismo
¿Cuál de los dos va primero? ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos cada uno?

TEMA 10 ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

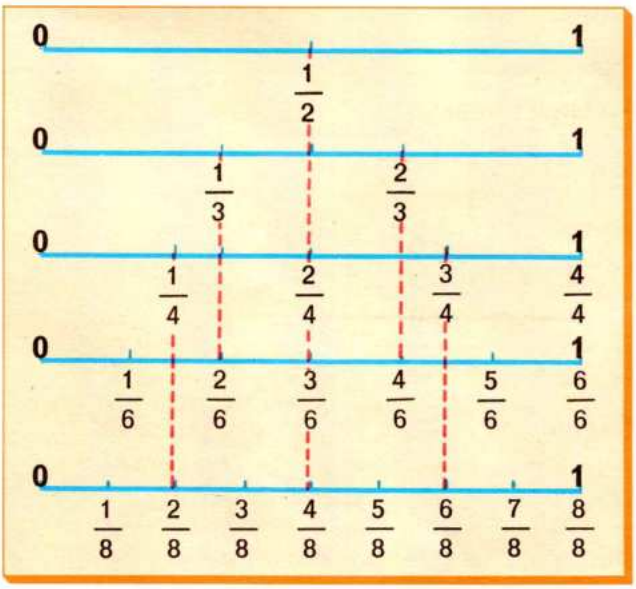
1. Representación de los números racionales en la recta numérica



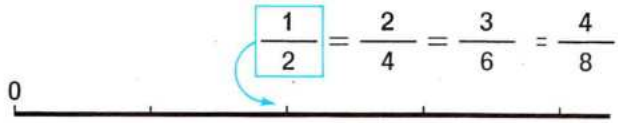
PRIMER CASO

Cuando el número racional es menor que 1.

Las fracciones menores que 1 se representan en el segmento $\overline{01}$. Así, para representar las fracciones $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}$ se divide el segmento de extremos **0** y **1** en seis partes iguales.



Observa la figura: En varios segmentos unidad se han representado algunas fracciones. Se observa que las fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ se representan por el mismo punto:



Por eso cada número racional viene representado por un solo punto. Como para representar un número racional basta representar una de las fracciones que lo forman, es conveniente elegir la fracción más sencilla.

Si el número racional es menor que 1, el punto que lo representa cae dentro del segmento $\overline{01}$.

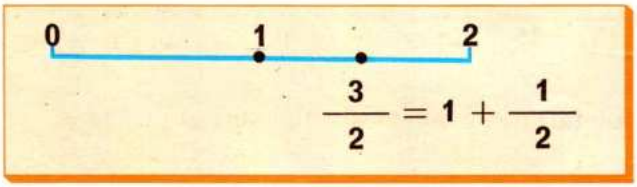
SEGUNDO CASO

Cuando el número racional es mayor que 1.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \rightarrow \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

Sea el número racional $\frac{3}{2} \rightarrow \left\{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \frac{12}{8}, \ldots\right\}$ que es mayor que 1. Para representarlo en la recta numérica se descompone la fracción $\frac{3}{2}$ en una suma de un entero y una fracción menor que 1.

Así resulta: $\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \rightarrow \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$



A partir del punto **0** se lleva la parte entera (1) y la fracción $\frac{1}{2}$ se representa en el segmento $\overline{12}$ de extremos 1 y 2.

1. Representa en la recta numérica estas fracciones: a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$; b) $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$

A. ¿Qué observas?

B. ¿Qué punto representa el número racional $\frac{1}{2} \rightarrow \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \ldots\right\}$?

Actividades

1. Para cada número racional positivo, señala el punto que le corresponde:

$\left\{\frac{5}{6}, \frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}, \ldots\right\}$ 0 A B C D E 1

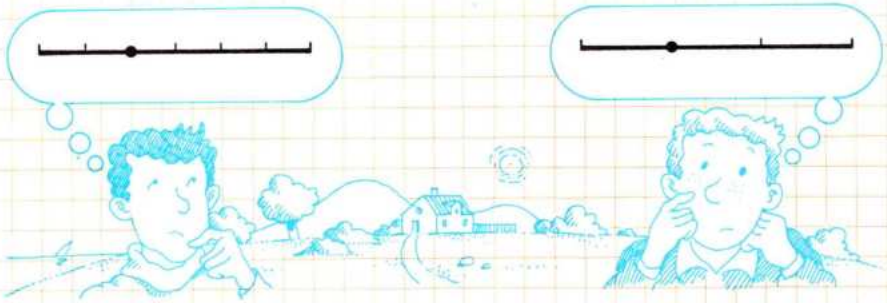
$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \ldots\right\}$ 0 A B 1

$\left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \ldots\right\}$ 0 A B C 1

$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\right\}$ 0 A B C 1

2. Observa cómo piensan representar Luis y Pedro el número racional $\frac{1}{3}$

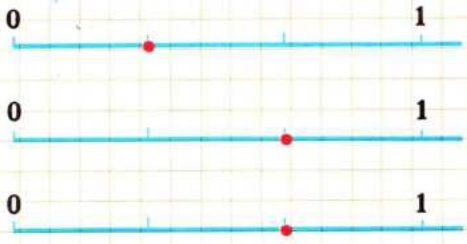
$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \ldots\right\}$$



LUIS PEDRO

- ¿Cuál lo hace de forma más sencilla?
- ¿Qué fracción se debe elegir para representar un número racional?

3. Rodea en cada caso la fracción que indica el número racional representado por el punto rojo



0 1 $\frac{3}{9}, \frac{4}{8}, \frac{2}{8}, \frac{5}{8}$

0 1 $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{4}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}$

0 1 $\frac{10}{15}, \frac{11}{15}, \frac{12}{15}, \frac{14}{15}$

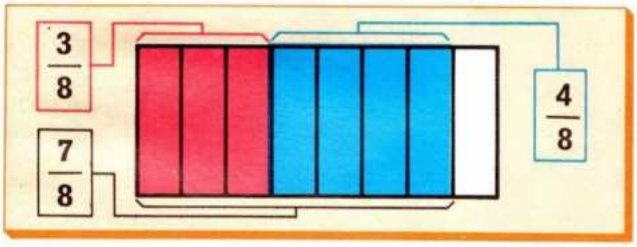
4. Indica en cada recta numérica el punto que representa el número racional que figura a la izquierda.

$\frac{9}{5}$ 0 1 2

$\frac{11}{4}$ 0 1 2 3

2. Suma de números racionales. I

Suma de fracciones del mismo denominador.



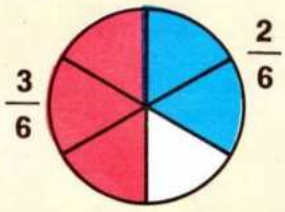
Toma un papel y, por dobleces sucesivos, divídelo en ocho partes iguales, como indica la figura.

Colorea tres partes de rojo y cuatro de azul.

¿Qué fracción del papel hay pintada de rojo?

¿Qué fracción del papel hay pintada de azul?

¿Qué fracción del papel hay coloreada?



$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

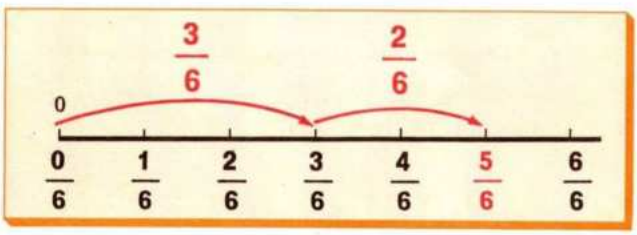
Observa cómo se suman fracciones del mismo denominador.

- La parte de círculo coloreada de rojo es $\frac{3}{6}$
- La parte de círculo coloreada de azul es $\frac{2}{6}$

La parte total coloreada es $\frac{5}{6}$

$\frac{3}{6}$ de círculo + $\frac{2}{6}$ de círculo = $\frac{5}{6}$ de círculo

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$



Observa esta misma suma de fracciones en la recta numérica.

Para sumar fracciones del mismo denominador, se suman los numeradores y se deja el mismo denominador.

1. Calcula:

a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{6} + \frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{10} + \frac{5}{10}$ d) $\frac{2}{7} + \frac{1}{7}$

2. Resuelve los siguientes problemas.

A. Luis se comió $\frac{5}{12}$ de los pasteles y Antonio $\frac{3}{12}$ de los mismos.
¿Qué fracción de los pasteles se comieron?

B. Un señor pintó los $\frac{5}{10}$ de la verja de su jardín mientras que su hijo pintaba los $\frac{3}{10}$ de la misma.
¿Qué porción de la verja pintaron entre los dos?

C. Margarita ha comprado $\frac{2}{6}$ de metro de cinta azul y $\frac{1}{6}$ de metro de cinta roja.
¿Cuánta cinta ha comprado?

Suma de fracciones de distinto denominador.

Las fracciones de distinto denominador no se pueden sumar directamente. Para poder sumarlas hay que hallar otras fracciones equivalentes, pero que tengan el mismo denominador.

Esto, como sabes, puede hacerse de dos formas.

Primera forma: **Por el método de productos cruzados.**

Vamos a realizar la suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8}$$

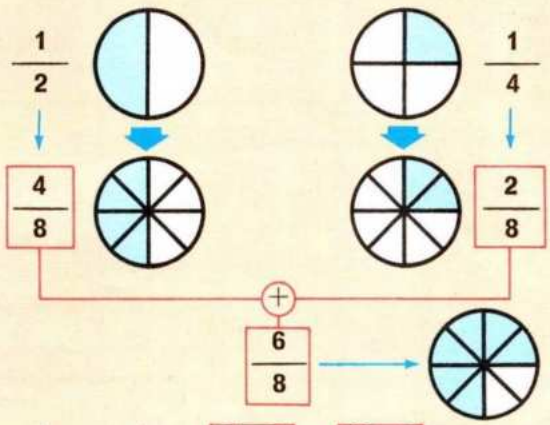
Fracciones equivalentes

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{2}{8}$$

Fracciones equivalentes

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$$

MÉTODO DE LOS PRODUCTOS CRUZADOS



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$$

Segunda forma: **Por el método del m.c.m.**

En la mayor parte de los casos es más conveniente reducir a común denominador por el método del mínimo común múltiplo.

Así, para la suma $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$ se tiene:

m.c.m. (4, 6) = 12

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$$

Este método tiene la ventaja de que la fracción que se obtiene es una fracción de términos más sencillos.

MÉTODO DEL m.c.m.

m. c. m. (4, 6) = 12

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 3}{12} + \frac{1 \cdot 2}{12} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$$

Para sumar fracciones de distinto denominador, se reducen estas fracciones a común denominador y después se suman los numeradores y se deja el mismo denominador.

1. Suma las siguientes fracciones utilizando el método de los productos cruzados.

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{5} + \frac{5}{6}$ c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ d) $\frac{5}{4} + \frac{1}{2}$

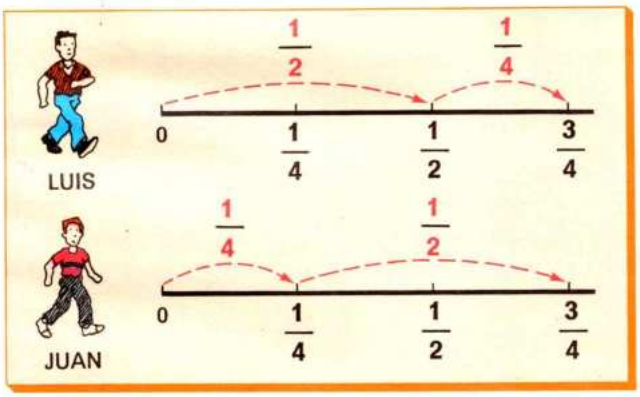
2. Haz las siguientes sumas utilizando el método del m.c.m.

a) $\frac{3}{8} + \frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{6} + \frac{1}{2}$ g) $\frac{3}{8} + \frac{5}{6}$

b) $\frac{5}{4} + \frac{3}{6}$ d) $\frac{3}{5} + \frac{1}{15}$ f) $\frac{1}{10} + \frac{3}{5}$ h) $\frac{5}{12} + \frac{7}{15}$

4. Propiedades de la suma de números racionales

Propiedad conmutativa.



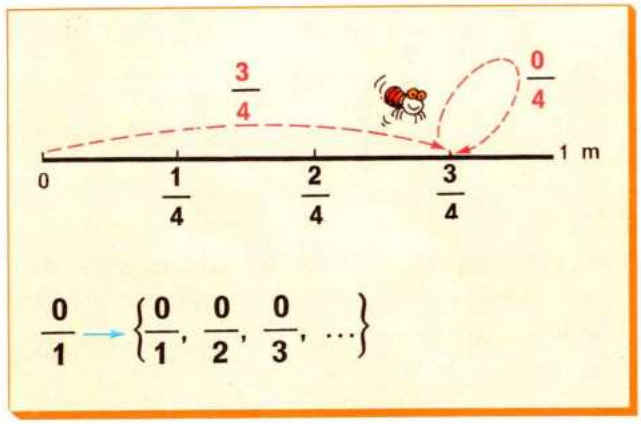
- Luis camina $\frac{1}{2}$ de km + $\frac{1}{4}$ de km = $\frac{3}{4}$ de km.
- Juan camina $\frac{1}{4}$ de km + $\frac{1}{2}$ de km = $\frac{3}{4}$ de km.

Por eso, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

Ésta es la propiedad conmutativa de la suma de números racionales.

Propiedad conmutativa. El orden de los sumandos no altera las sumas.

Elemento neutro.



$\frac{0}{1} \rightarrow \left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \ldots\right\}$

En el primer salto la pulga avanza $\frac{3}{4}$ de metro, y en el segundo, $\frac{0}{4}$ de metro; es decir, no avanzó nada.

La pulga avanzó en los dos saltos:

$$\frac{3}{4} + \frac{0}{4} = \frac{3}{4} \text{ de metro.}$$

El número racional $\frac{0}{1}$ es el elemento neutro de la suma de números racionales $\frac{0}{1} \rightarrow \left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}\right\} \ldots$

Elemento neutro. El elemento neutro de la suma es el número racional $\frac{0}{1}$.

Propiedad asociativa.

$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{5}$ ← Cálculo 1.er miembro

$\left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) + \frac{2}{5} = \frac{5}{6} + \frac{2}{5} = \frac{25}{30} + \frac{12}{30} = \frac{37}{30}$

$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)$ ← Cálculo 2.º miembro

$\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{15} + \frac{6}{15}\right) = \frac{1}{2} + \frac{11}{15} = \frac{15}{30} + \frac{22}{30} = \frac{37}{30}$

La suma de varios números racionales no depende de la forma en que se asocien.

Observa que:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{5}}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)}_{\text{Segundo miembro}}$$

La propiedad asociativa permite calcular sumas de varios sumandos de números racionales sin usar paréntesis.

Propiedad asociativa. Para sumar varios números racionales se pueden sustituir dos o más de ellos por su suma efectuada.

Actividades

1. Dados los números racionales $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$:

$\frac{1}{2} \rightarrow \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \ldots\right\}$ $\quad$ $\frac{2}{3} \rightarrow \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \ldots\right\}$

a) Suma $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ utilizando las fracciones $\frac{3}{6}$ y $\frac{4}{6}$ $\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} =$

b) Suma $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ utilizando las fracciones $\frac{6}{12}$ y $\frac{8}{12}$ $\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{6}{12} + \frac{8}{12} =$

c) ¿Son equivalentes las fracciones que resultan en a) y en b)? ¿Pertenecen al mismo número racional?

2. Calcula:

a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{4}$ $\quad$ b) $\frac{1}{4} + \frac{3}{2}$ $\quad$ c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ $\quad$ d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

¿Cómo son los resultados de a) y b)? ¿Y los de c) y d)?

3. Calcula $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{5}{4}$

Puedes hacerlo de dos modos: a) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{5}{4}$ $\quad$ b) $\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{4}\right)$

Obtienes el mismo resultado en a) y en b)?

4. Calcula:

a) $\frac{5}{3} + \frac{0}{3}$ $\quad$ b) $\frac{5}{9} + \frac{0}{9}$ $\quad$ c) $\frac{1}{4} + \frac{0}{4}$ $\quad$ d) $\frac{1}{5} + \frac{0}{5}$

¿Qué número racional forman todas las fracciones de numerador 0?

5. Suma las fracciones representadas por la parte rayada:

6. Calcula $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$:

a) Reduciendo a común denominador por el método de los productos cruzados.

b) Reduciendo a común denominador por el método del m.c.m.

¿Con qué método se obtiene la fracción más sencilla?

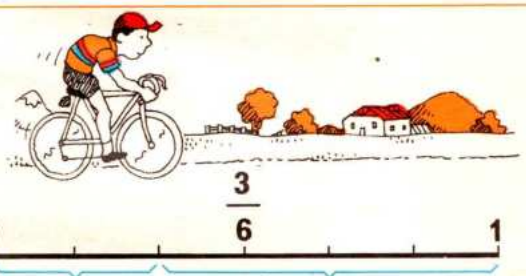
7. Ya sabes que las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se pueden reducir a común denominador multiplicando los términos de cada una por el denominador de la otra:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}; \quad \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{b \cdot d}$$

Así resulta que: Si $ad > bc$, entonces $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ $\quad$ Si $ad < bc$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

Compara de esta forma estas fracciones: a) $\frac{5}{3}$ y $\frac{7}{4}$ $\quad$ b) $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{3}$

5. Resta de números racionales. I



$$\frac{6}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$

Resta de fracciones del mismo denominador.

La resta de números racionales se reduce a la resta de las fracciones que los representan. En todos los casos la fracción minuendo ha de ser mayor que la fracción sustraendo.

El ciclista ha recorrido $\frac{2}{6}$ del total de su camino.

¿Cuánto le falta por recorrer aún?

Si ha recorrido los $\frac{2}{6}$, esto significa que ha recorrido dos partes de seis.

Como el total de la carrera consistirá en recorrer $\frac{6}{6}$

falta por recorrer: $\frac{6}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$ del camino.

Resta de fracciones de distinto denominador.

m.c.m. (4, 6) = 12

$$\frac{7}{4} - \frac{5}{6} = \frac{21}{12} - \frac{10}{12} = \frac{11}{12}$$

Para restar fracciones de distinto denominador se procede, como en la suma, reduciendo previamente a común denominador.

Observa cómo se hace la resta $\frac{7}{4} - \frac{5}{6}$

Para restar fracciones del mismo denominador se restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

Para restar fracciones de distinto denominador se reducen previamente las fracciones a común denominador y después se restan.

1. Comprueba en cada caso que el minuendo es mayor que el sustraendo y haz las restas:

a) $\frac{1}{5} - \frac{1}{7}$; como $1 \cdot 7 > 1 \cdot 5$, resulta que $\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$

b) $\frac{2}{3} - \frac{3}{7}$; como $2 \cdot 7 > 3 \cdot 3$, resulta que $\frac{2}{3} > \frac{3}{7}$

c) $\frac{15}{11} - \frac{10}{11}$

d) $\frac{5}{4} - \frac{3}{5}$

2. Calcula:

a) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ ¿Se puede hacer la resta?

b) $\frac{1}{4} - \frac{2}{3}$ ¿Tiene la resta de números racionales la propiedad conmutativa?

3. Reduce a común denominador por el m.c.m. y haz las restas:

a) $\frac{5}{4} - \frac{1}{6}$

b) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$

c) $\frac{11}{10} - \frac{3}{5}$

d) $\frac{7}{9} - \frac{1}{6}$

Actividades

1. Sumas y restas de enteros y fracciones.

EJEMPLO RESUELTO

Para sumar o restar un entero a y una fracción se escribe: $a = \frac{a}{1}$

Ejemplos:

$$3 + \frac{5}{4} = \frac{3}{1} + \frac{5}{4} = \frac{12}{4} + \frac{5}{4} = \frac{17}{4}$$

$$3 - \frac{5}{4} = \frac{3}{1} - \frac{5}{4} = \frac{12}{4} - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$$

Calcula:

a) $1 - \frac{1}{2}$ c) $1 - \frac{1}{3}$ e) $2 - \frac{5}{4}$ g) $4 - \frac{1}{6}$ i) $1 + \frac{1}{4}$

b) $1 - \frac{1}{4}$ d) $2 - \frac{3}{4}$ f) $3 - \frac{5}{3}$ h) $2 + \frac{3}{4}$ j) $1 + \frac{3}{7}$

2. Calcula:

a) $\frac{5}{4} - 1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{1} = \ldots$ c) $\frac{7}{2} - 2$ e) $\frac{11}{9} - 1$

b) $\frac{11}{3} - 2 = \frac{11}{3} - \frac{2}{1} = \ldots$ d) $\frac{11}{2} - 1$ f) $\frac{8}{3} - 2$

3. Suma y resta combinadas.

EJEMPLO RESUELTO

Observa dos modos de hacer esta resta:

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{4}\right)$$

Reduciendo a fracciones

$$\frac{5}{2} - \frac{5}{4} = \frac{10}{4} - \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

Restando por separado los enteros y las fracciones

$$(2 - 1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Calcula:

a) $\left(3 + \frac{1}{4}\right) - \left(2 + \frac{1}{6}\right)$ b) $\left(2 + \frac{3}{4}\right) + \left(1 + \frac{2}{5}\right)$

4. En ocasiones, la suma de un entero y una fracción como $2 + \frac{3}{8}$ se escribe $2\frac{3}{8}$ y se llama **número mixto.**

Calcula:

a) $2\frac{3}{8} + 3\frac{1}{8} = (2 + 3) + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) = \ldots$ c) $3\frac{1}{5} + 1\frac{7}{10}$

b) $2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{3} = (2 + 1) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \ldots$ d) $5\frac{1}{4} + 1\frac{1}{6}$

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Haz estas operaciones:

① $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ ② $\frac{3}{7} + \frac{1}{7}$ ③ $\frac{3}{9} + \frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{10} + \frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{2}{15} + \frac{5}{15}$ ⑥ $\frac{7}{9} - \frac{2}{9}$ ⑦ $\frac{5}{4} - \frac{3}{4}$ ⑧ $\frac{4}{3} - \frac{1}{3}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula:

a) $\frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{1}{10}$ b) $\frac{3}{20} + \frac{4}{5} - \frac{3}{10}$ c) $\frac{7}{20} + \frac{13}{15} - \frac{1}{5}$ d) $\frac{7}{60} + \frac{43}{50} - \frac{7}{30}$ e) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$ f) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{15}$

2. Responde:

a) ¿Cómo se restan fracciones de igual denominador?

b) ¿Cómo se restan fracciones de distinto denominador?

3. Calcula:

a) $\frac{8}{5} + \frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{6} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{5}{13} - \frac{2}{30}$

4. Si **m** → minuendo, **s** → sustraendo, **d** → diferencia y sabes que se cumplen estas equivalencias:

$m = s + d \rightarrow d = m - s \rightarrow s = m - d$

teniendo en cuenta esto, calcula en cada caso el valor de x:

a) $18 - x = 13 \rightarrow x = 18 - 13$ b) $120 - x = 34$ c) $\frac{3}{4} - x = \frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{4} - x = \frac{1}{3}$ e) $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ f) $\frac{3}{5} - \frac{1}{6} = x$

5. La suma de dos números es 480 y uno de ellos es 140. ¿Cuál es el otro?

6. La suma de dos fracciones es $\frac{19}{12}$ y una de ellas es $\frac{3}{4}$. ¿Cuál es la otra?

7. ¿Qué fracción se ha de restar a $\frac{1}{2}$ para que resulte $\frac{7}{34}$?

8. La diferencia de dos fracciones es 1. Si la menor es $\frac{1}{3}$ ¿cuál es la mayor?

9. De un recipiente que contiene los $\frac{5}{6}$ de capacidad se extraen los $\frac{2}{3}$.

¿Cuánto queda aún en el recipiente?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. El paso de un padre es $\frac{3}{4}$ de metro y el de un hijo $\frac{2}{3}$ de metro.

a) ¿Cuánto avanza el padre en dos pasos?

b) ¿Cuánto avanza el hijo en dos pasos?

c) ¿Cuál es la diferencia entre el paso del padre y el paso del hijo?

2. Juan compró $\frac{6}{11}$ de una finca y después compró $\frac{1}{5}$ de la misma.

¿Qué parte de la finca compró?

3. En una finca se dedica $\frac{1}{3}$ al cultivo de alfalfa y $\frac{2}{5}$ al cultivo de cereales.

El resto está sin cultivar.

¿Qué fracción de la finca está sin cultivar?

Si la finca mide 30.000 m^2 ¿cuántos metros cuadrados están cultivados?

4. Luis ha estudiado $\frac{3}{4}$ de hora y Manuel $\frac{2}{5}$ de hora.

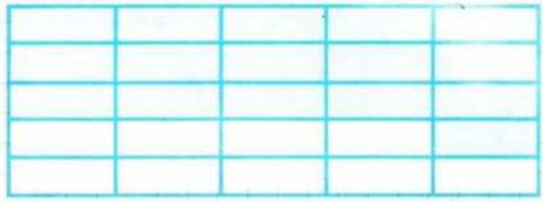
¿Qué fracción de hora ha estudiado Luis más que Manuel?

5. Antonio ha regalado $\frac{1}{7}$ de su colección de sellos y después $\frac{1}{5}$ de su colección.

¿Qué fracción representan los sellos que le quedan?

6. Se han pavimentado los $\frac{16}{25}$ de una avenida.

¿Cuánto falta por pavimentar?



7. En un recipiente que contiene 12 litros y medio de vino se vierten $8 + \frac{2}{3}$ litros.

¿Cuál es la capacidad del recipiente si aún caben $25 + \frac{5}{6}$ litros?

8. Ana creció $\frac{7}{8}$ de cm, mientras que Aurora creció $\frac{5}{8}$ de cm.

¿Cuánto más creció Ana que Aurora?

9. El jardín de Luis mide $\frac{3}{4}$ de hectárea, mientras que el de Pedro mide $\frac{2}{3}$ de hectárea.

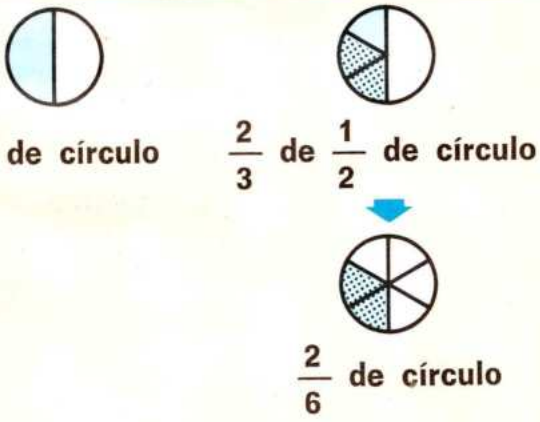
¿Cuánto más extenso es el jardín de Luis que el de Pedro?

10. En un concurso de dibujo $\frac{1}{15}$ de los participantes obtuvieron como premio una bicicleta, $\frac{1}{6}$ obtuvieron como premio un balón de fútbol y al resto de los participantes se le dio una caja de bombones. ¿Qué fracción de los concursantes recibieron los bombones?

TEMA 11 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

1. Producto de fracciones

Cómo se multiplican las fracciones.



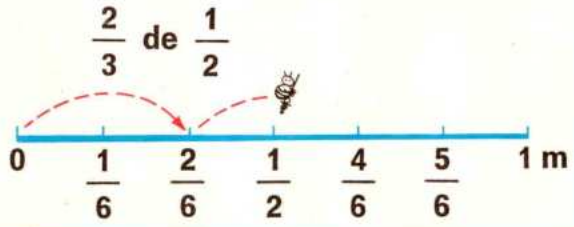
Observa los círculos y comprueba que

$\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de círculo = $\frac{2}{6}$ de círculo.

Se escribe: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$

La fracción $\frac{2}{6}$ es el producto de las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$

Una fracción de una fracción es igual al producto de ambas fracciones.



La pulga ha dado un salto de $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de metro.

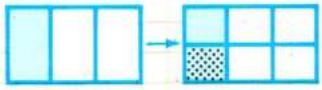
El salto de la pulga es de $\frac{2}{6}$ de metro.

Observa que $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$

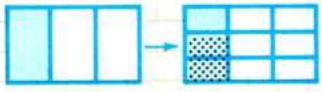
El producto de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

1. Completa en tu cuaderno:

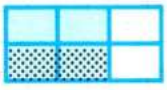
a)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \ldots$

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3} = \ldots$

b) 

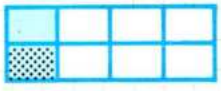
$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3} = \ldots$

2. Observa las figuras y completa las fracciones que faltan:



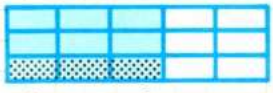
$\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3} = \ldots$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \ldots$



$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4} = \ldots$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \ldots$



$\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{5} = \ldots$

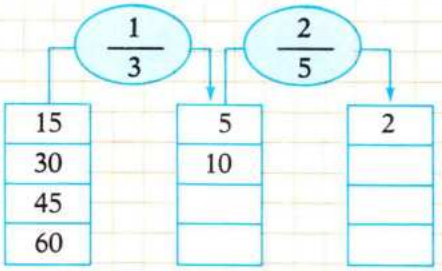
$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \ldots$

3. Calcula:

a) $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$

Actividades

1. Completa las tablas:



$\frac{2}{15}$ de 15 = $\frac{2}{15}$ de 30 = $\frac{2}{15}$ de 45 = $\frac{2}{15}$ de 60 =

$\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$ de 15 = $\frac{2}{5}$ de 5 =

$\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$ de 30 = $\frac{2}{5}$ de 10 =

$\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$ de 45 = $\frac{2}{5}$ de ... =

$\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$ de 60 = $\frac{2}{5}$ de ... =

2. Calcula y contesta:

a) $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}\right)$ de 120 = ...

b) $\frac{1}{3}$ de 120 y después $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$ de 120 = ...

c) ¿Es lo mismo $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$ de 120 que $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}\right)$ de 120?

3. Calcula:

a) $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{3}$ e) $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{9}$ f) $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$

4. Si uno de los factores es entero, se escribe en forma de fracción con denominador 1 y se aplica la misma regla que para multiplicar fracciones.

Calcula: a) $2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5}$ b) $3 \cdot \frac{1}{4}$ c) $5 \cdot \frac{1}{6}$

5. Calcula fracciones de horas, minutos y segundos.

EJEMPLO RESUELTO

a) ¿Qué fracción de hora es $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$ de hora?

b) ¿Cuántos minutos son?

$\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$ de hora = $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}\right)$ de hora = $\frac{6}{20}$ de hora = $\frac{3}{10}$ de hora.

Como 1 hora = 60 minutos:

$\frac{3}{10}$ de hora = $\frac{3}{10} \cdot 60$ minutos = $\frac{3 \cdot 60}{10}$ = **18 minutos**

A. ¿Qué fracción de hora es $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de hora? ¿Cuántos minutos son?

B. ¿Qué fracción de hora es $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{5}$ de hora? ¿Cuántos minutos son?

2. Propiedades del producto de números racionales. I

Propiedad conmutativa.

Cálculo 1.er miembro: $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35}$

Cálculo 2.º miembro: $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{12}{35}$

$=$

Observa que al cambiar de orden los factores se obtiene el mismo producto:

$$\underbrace{\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5}}_{\text{Segundo miembro}}$$

Elemento neutro.

$$\frac{3}{4} \cdot \boxed{\frac{1}{1}} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1} = \frac{3}{4}$$

El elemento neutro para el producto de números racionales es el número racional $\frac{1}{1}$

$$\frac{1}{1} \rightarrow \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \ldots\right\}$$

ya que al multiplicar cualquier número racional por $\frac{1}{1}$ resulta el mismo número racional:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1} = \frac{3}{4}$$

Propiedad asociativa.

Cálculo 1.er miembro: $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{8}{3} = \frac{10}{21} \cdot \frac{8}{3} = \frac{80}{63}$

Cálculo 2.º miembro: $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{40}{21} = \frac{80}{63}$

$=$

El producto de varios números racionales no depende de la forma en que se asocien:

$$\underbrace{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{8}{3}}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{8}{3}\right)}_{\text{Segundo miembro}}$$

La propiedad asociativa permite calcular productos de varios números racionales sin usar paréntesis.

La propiedad conmutativa: El orden de los factores no altera el producto.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

El elemento neutro del producto es el número racional $\frac{1}{1}$, porque:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

La propiedad asociativa: Para multiplicar varios números racionales se pueden sustituir dos o más de ellos por su producto efectuado:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{f}{g} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{f}{g}\right)$$

3. Propiedades del producto de números racionales. II

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

$$5 \cdot (6 + 8) = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 8$$
$$5 \cdot 14 = 30 + 40$$
$$70 = 70$$

Observa cómo se expresa con números naturales la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Comprobemos que esta propiedad se cumple también con números racionales.

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{10}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}$$

DESARROLLO DEL PRIMER MIEMBRO

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{10}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{8}{10} + \frac{1}{10}\right) =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{18}{30}$$

DESARROLLO DEL SEGUNDO MIEMBRO

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{15} + \frac{2}{30} =$$
$$= \frac{16}{30} + \frac{2}{30} = \frac{18}{30}$$

En general: $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{f}{g}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{f}{g}$

La propiedad distributiva permite transformar un producto en una suma o una suma en un producto.

1. Calcula y contesta:

a) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\right)$ b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$ c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7}$ d) $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5}$

¿Cómo son los resultados encontrados en a) y b)? ¿Y los de c) y d)?

2. También se cumple la propiedad distributiva del producto respecto de la resta.

Compruébalo calculando $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{8} - \frac{2}{9}\right)$

3. Saca factor común:

EJEMPLO RESUELTO

Al igual que con los números naturales, con los números racionales también se puede utilizar la propiedad distributiva para sacar el factor común, es decir, para transformar una suma o resta en producto.

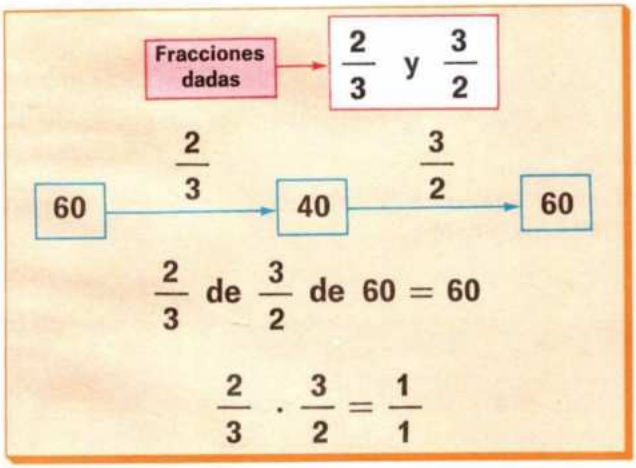
① $5 \cdot 8 + 5 \cdot 6 = 5 \cdot (8 + 6)$ — Factor común

② $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$ — Factor común

Saca factor común de $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$

4. Números racionales inversos.

Fracciones inversas.



¿Cuánto es $\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de **60**?

Como $\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{6} = \frac{1}{1}$

resulta que $\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $60 = \frac{1}{1}$ de $60 = 60$.

Las fracciones que, como $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$, al multiplicarlas dan la fracción $\frac{1}{1}$ se llaman **fracciones inversas.**

Números racionales inversos.

$\frac{3}{2} \rightarrow \left\{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \frac{12}{8}, \ldots\right\}$

$\frac{2}{3} \rightarrow \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \ldots\right\}$

Observa los números racionales $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$

Las fracciones de cada uno son las inversas de las fracciones del otro; por eso se dice que los números racionales $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ son inversos.

Dos números racionales son inversos si su producto es el elemento neutro $\frac{1}{1}$

Todo número racional distinto de $\frac{0}{1}$ tiene su inverso.

El inverso del número racional $\frac{a}{b}$ distinto de $\frac{0}{1}$ es $\frac{b}{a}$, ya que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{1}$

1. ¿Cuál es el inverso de $\frac{5}{7}$? ¿Por qué?

2. Escribe los inversos de $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{2}$

3. Calcula:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}$ c) $\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8}$ d) $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4}$

4. ¿Tiene inverso el número racional $\frac{0}{1} \rightarrow \left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \ldots\right\}$?

Recuerda que el denominador de una fracción tiene que ser un número distinto de cero.

5. Calcula y simplifica:

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ ¿Obtienes los mismos resultados?

5. División de números racionales

¿Cómo se dividen dos números racionales?

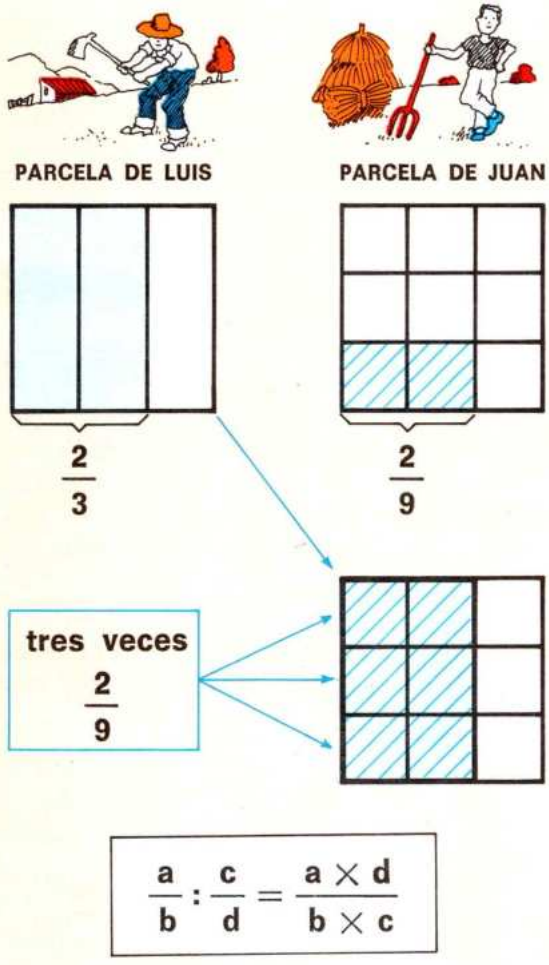
Luis y Juan tienen dos parcelas iguales.

Luis tiene sembrados $\frac{2}{3}$ *de su parcela y Juan tiene sembrados* $\frac{2}{9}$ *de la suya.*

¿Cuántas veces cabe la parte sembrada por Juan en la parte sembrada por Luis?

Lo que hay que averiguar es cuántas veces está contenido $\frac{2}{9}$ en $\frac{2}{3}$

Para ello hay que dividir: $\frac{2}{3} : \frac{2}{9}$



Observa en la figura que $\frac{2}{9}$ está contenido tres veces en $\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3} : \frac{2}{9} = \frac{3}{1}$$

Observa que $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 2} = \frac{18}{6} = 3$ y que $\frac{9}{2}$ es el inverso de $\frac{2}{9}$

Por eso: $\frac{2}{3} : \frac{2}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{18}{6} = 3.$

La parte sembrada por Juan cabe tres veces en la parte sembrada por Luis.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Para dividir un número racional por otro se multiplica el primero por el inverso del segundo, es decir, se multiplican las fracciones en cruz: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

1. Calcula:

a) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} =$

b) $\frac{7}{3} : \frac{5}{6} = \frac{7 \cdot 6}{3 \cdot 5} =$

c) $\frac{7}{2} : \frac{4}{5}$

d) $\frac{9}{4} : \frac{2}{3}$

e) $\frac{5}{3} : \frac{2}{7}$

f) $\frac{7}{13} : \frac{5}{8}$

2. ¿Se puede hacer la división $\frac{2}{5} : \frac{0}{1}$? ¿Por qué?

3. Calcula:

a) $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$ c) $\frac{2}{5} : \frac{7}{4}$ d) $\frac{7}{4} : \frac{2}{5}$

¿Tiene la propiedad conmutativa la división de números racionales?

6. Operaciones combinadas con fracciones

Uso de los paréntesis.

REGLA PRIMERA

$$\left(\frac{3}{1}:\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{12}{5}-\frac{1}{8}=\frac{96-5}{40}=\frac{91}{40}$$

REGLA SEGUNDA

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}-\frac{2}{8}=\frac{1}{8}$$

REGLA TERCERA

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$$

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{19}{12}-\frac{1}{5}=\frac{83}{60}$$

REGLA PRIMERA

Cuando en una expresión numérica aparecen varias operaciones, hay que tener presente que se realizan en primer lugar las operaciones indicadas dentro de los paréntesis.

Observa cómo se calcula $\left(3:\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)$

REGLA SEGUNDA

Si no hay paréntesis, los productos tienen prioridad, es decir, se hacen antes que las sumas y las restas.

Así, en $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ hay que hacer primero $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$

REGLA TERCERA

Si no hay paréntesis y la expresión sólo tiene sumas y restas, se efectúan los cálculos en el orden normal de lectura.

1. Calcula:

a) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)$ c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}$ e) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)$

b) $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$ d) $\left(\frac{5}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-2\right)$ f) $\frac{7}{3}+\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\right)$

2. Teniendo en cuenta que en una división exacta $D=d\cdot c \rightarrow d=D:c \rightarrow c=D:d$, podemos averiguar el valor de un término cuando se conocen los otros dos.

EJEMPLOS RESUELTOS

① Calcula x: $x\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$

$$x=\frac{1}{4}:\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$$

② Calcula x: $x:\frac{5}{4}=\frac{1}{2}$

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{8}$$

Calcula el valor de x:

a) $\frac{1}{2}\cdot x=\frac{1}{3}$ b) $4\cdot x=\frac{1}{2}$ c) $x:\frac{3}{4}=\frac{1}{5}$ d) $x:\frac{5}{6}=\frac{1}{4}$

7. Aplicación de las fracciones a la resolución de los problemas

PROBLEMA 1

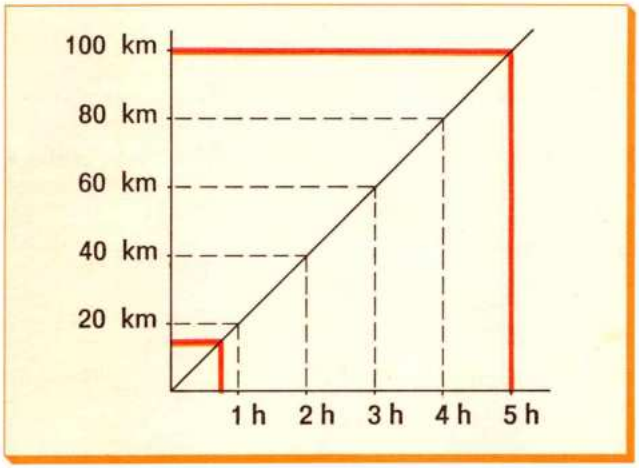
Una bomba llena en 1 hora $\frac{1}{2}$ de un depósito.

¿Cuánto tiempo tardará la bomba en llenar enteramente el depósito?

Habrá que averiguar cuántas veces está contenido $\frac{1}{2}$ en 1. Para ello hay que hacer la división $1 : \frac{1}{2}$

$$1 : \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2 \text{ horas}$$

La bomba tardará 2 horas.



PROBLEMA 2

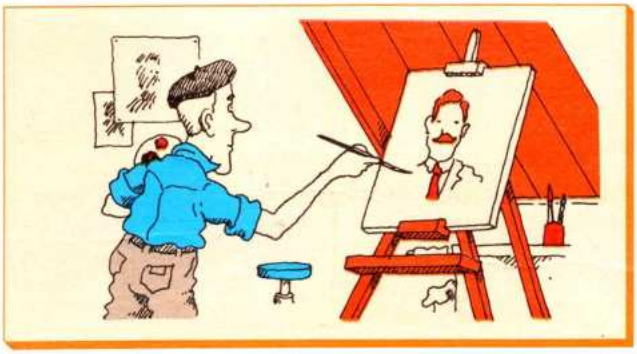
Un tractor avanza en cada hora 20 km, es decir, su velocidad es 20 km por hora.

¿Cuánto recorre en $\frac{3}{4}$ de hora? ¿Y en 5 horas?

Observa la gráfica del movimiento. En la recta horizontal se han representado los tiempos (en horas) y en la recta vertical se han representado los espacios recorridos (en kilómetros).

En $\frac{3}{4}$ de hora recorre $\frac{3}{4} \cdot 20 = \frac{3 \cdot 20}{4} = \frac{60}{4} = 15$ km.

En 5 horas el tractor recorre $5 \cdot 20 = 100$ km.



PROBLEMA 3

Un dibujante hace el retrato de una persona en $\frac{3}{4}$ de hora.

¿Cuántos retratos puede hacer en 6 horas?

Hay que dividir $6 : \frac{3}{4}$

$$\frac{6}{1} : \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 4}{3} = \frac{24}{3} = 8 \text{ retratos}$$

Puede hacer 8 retratos.

1. Resuelve los siguientes problemas:

A. Un grifo llena en 1 hora $\frac{1}{3}$ de un recipiente. ¿Cuánto tiempo tarda en llenarlo?

B. Una persona pinta una habitación en 5 horas. ¿Qué parte de la habitación pinta en 1 hora?

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula:

① $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$ ⑤ $2 \cdot \frac{1}{2}$ ⑥ $3 \cdot \frac{1}{3}$ ⑦ $4 \cdot \frac{1}{4}$ ⑧ $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{5}$ de 30 y los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{2}{3}$ de 30. ¿Son iguales?

2. ¿Qué fracción dividida por $\frac{2}{3}$ da $\frac{5}{6}$?

3. ¿Qué fracción de hora es $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ de hora? ¿Cuántos minutos son?

4. Saca factor común en:

a) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$ b) $8 \cdot \frac{5}{9} - 3 \cdot \frac{5}{9}$

5. Halla el inverso de un número natural. ¿Es un número natural?

6. ¿Qué parte de hora es?

a) 30 min → 30 min = $\frac{30}{60}$ h b) 15 min c) 20 min d) 5 min

7. Se reparten los $\frac{3}{5}$ de una herencia entre tres personas.
¿Qué parte de la herencia corresponde a cada una?

8. En una clase de 40 alumnos los $\frac{2}{5}$ estudian francés, la cuarta parte estudia alemán y el resto estudia inglés.
¿Cuántos alumnos estudian cada uno de los idiomas?

9. Un curso del nocturno tiene 28 clases de $\frac{3}{4}$ de hora cada una.
¿Cuántas horas de clase tienen los alumnos de ese curso?

10. He gastado los $\frac{2}{3}$ de un dinero y después los $\frac{3}{4}$ del resto.
Si todavía me quedan 200 pesetas ¿cuánto dinero tenía al principio?

11. ¿Cuántas veces está contenido $\frac{3}{5}$ en 6? ¿Y $\frac{3}{2}$ en $\frac{9}{2}$?

12. Una persona lleva siempre el coche a 80 km por hora.
¿Cuántos kilómetros recorre en $\frac{3}{4}$ de hora?

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

EL PRISIONERO QUE RECOBRÓ LA LIBERTAD

Un rey tenía dos prisioneros, Alí y Mustafá, a los que propuso el siguiente problema:

«Aquí tenéis tres bolas blancas, (a), (b) y (c), de aspecto exactamente igual. Una de las bolas tiene un peso diferente a las otras dos. También tenéis una balanza. Daré la libertad al que consiga averiguar la bola que tiene un peso diferente en un menor número de pesadas.»

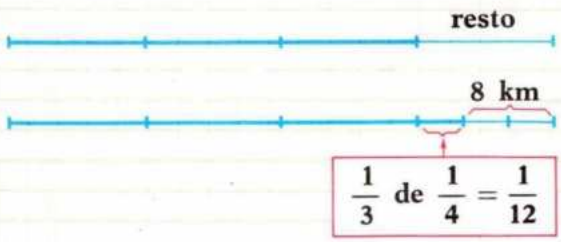
Mustafá averiguó cuál era la bola de peso diferente en cuatro pesadas y Alí lo averiguó en dos pesadas y recobró la libertad. ¿Cómo lo hizo Alí?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Un ciclista ha recorrido los $\frac{3}{4}$ del camino.

Después de un descanso ha recorrido un tercio del resto. Todavía le falta por recorrer 8 kilómetros.

¿Cuál es la longitud del camino?

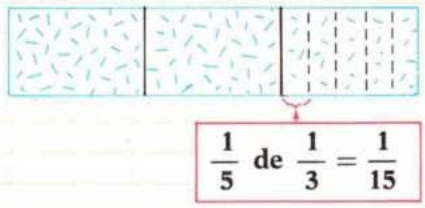


2. El café, al tostarlo, pierde $\frac{1}{5}$ de su peso. Con 9.000 kg de café ¿qué cantidad de café tostado se puede obtener?

¿Qué cantidad de café se necesita para obtener 600 kg de café tostado?

3. El dueño de un establecimiento vende los $\frac{2}{3}$ de una pieza de tela y uno de los dependientes $\frac{1}{5}$ del resto, quedando 4 metros sin vender.

¿Cuántos metros medía la pieza?

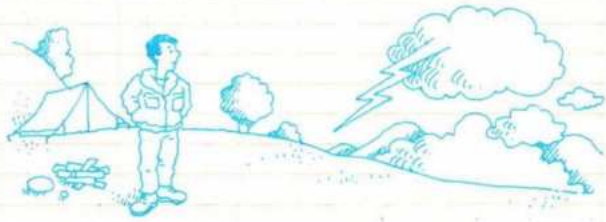


4. La leche contiene, aproximadamente, $\frac{4}{25}$ de su peso de crema y ésta produce los $\frac{8}{25}$ de su peso de mantequilla. Sabiendo que cada litro de leche pesa 1.030 gramos ¿qué cantidad de mantequilla se puede obtener de 1.000 litros de leche?

5. El sonido recorre aproximadamente $\frac{1}{3}$ de kilómetro cada segundo.

En una tormenta Antonio ve un rayo y a los 15 segundos oye el trueno.

¿A qué distancia han chocado las nubes?

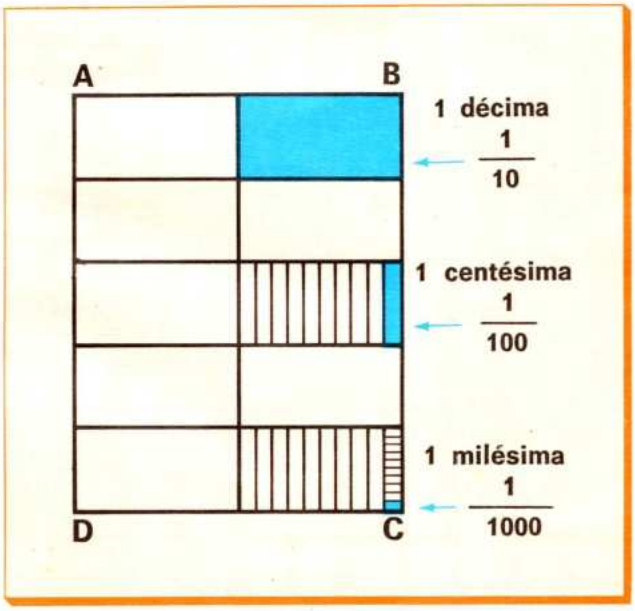


6. Un agricultor ha recogido 12.000 kg de naranjas, que clasifica en pequeñas, medianas y grandes. Las pequeñas son $\frac{1}{5}$ del total y las medianas son los $\frac{2}{3}$ del resto.

¿Cuántos kilos de naranjas hay de cada una de las clases?

TEMA 12 ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

1. Fracciones decimales y números decimales. I



Fracciones decimales y fracciones ordinarias.

Consideremos el rectángulo **ABCD** como unidad.

Observa cómo están representadas en el rectángulo las **fracciones decimales:**

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000}$$

En el rectángulo también se observa que:

1 unidad = 10 décimas

1 décima = 10 centésimas

1 centésima = 10 milésimas

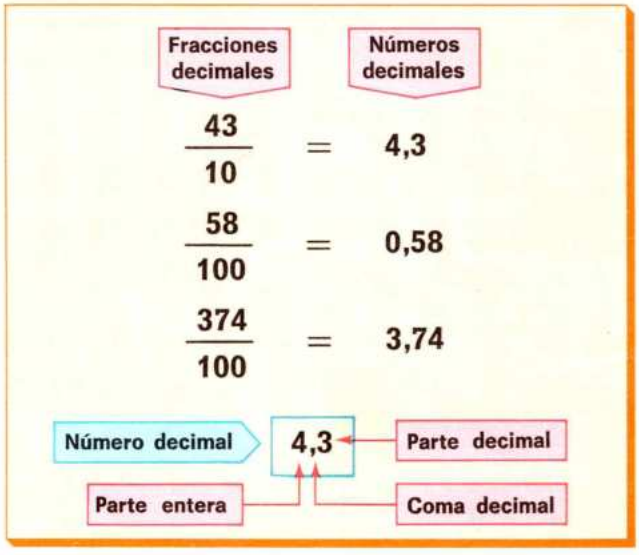
Las fracciones $\frac{3}{10}$, $\frac{48}{10}$, $\frac{32}{100}$, ... son también fracciones decimales.

Las fracciones $\frac{6}{9}$ y $\frac{2}{7}$ son **fracciones no decimales o fracciones ordinarias.**

Fracciones decimales son aquellas que tienen por denominador una potencia de 10, es decir, la unidad seguida de ceros: 10, 100, 1.000, ...

Fracciones ordinarias son aquellas que tienen por denominador un número que no es la unidad seguida de ceros.

Cómo se escribe una fracción decimal en forma de número decimal.



Las fracciones decimales se pueden escribir en forma de número decimal utilizando una coma que se llama **coma decimal:**

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$\frac{43}{10} = 4{,}3 \qquad \frac{374}{1000} = 0{,}374$$

Los números que se obtienen: 0,1; 0,01; 4,3; 0,374; ... tienen una **parte entera** y otra **parte decimal**, y se llaman **números decimales.**

Para escribir en forma de número decimal una fracción decimal, se escribe sólo el numerador y se separan con una coma, a partir de la derecha, tantas cifras decimales como ceros tenga el denominador.

2. Fracciones decimales y números decimales. II

Cómo se escribe un número decimal en forma de fracción decimal.

Números decimales		Fracciones decimales
4,3	=	$\frac{43}{10}$
0,58	=	$\frac{58}{100}$
3,745	=	$\frac{3745}{1000}$

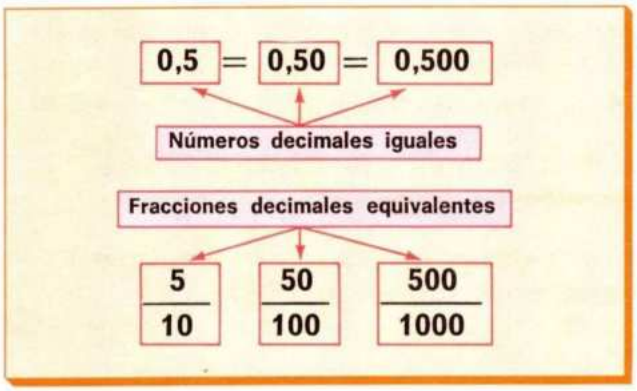
Observa cómo los números decimales **4,3**; **0,58** y **3,745** se escriben en forma de fracciones decimales.

Fíjate que en el denominador se escribe:

- **10** si hay una sola cifra decimal,
- **100** si hay dos cifras decimales,
- **1000** si hay tres cifras decimales.

Para escribir un número decimal en forma de fracción decimal se escribe en el numerador el número sin coma, y por denominador se pone la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número decimal.

Ceros a la derecha de un decimal.



Observa que estos números decimales tienen una parte fija, **0,5**, y que lo que cambia es el número de ceros a su derecha.

Estos números decimales corresponden a fracciones decimales equivalentes, y, por tanto, son números decimales iguales.

$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1000} = \frac{5000}{10000}$ Fracciones decimales

0,5 = 0,50 = 0,500 = 0,5000 Números decimales

Los ceros a la derecha de un número decimal no alteran su valor.

1. Escribe en forma de fracción los siguientes números decimales:

a) 0,4 c) 0,56 e) 0,05 g) 2,45 i) 7,002

b) 0,48 d) 0,325 f) 1,4 h) 3,04 j) 6,5

2. Escribe en forma de fracción decimal los siguientes números naturales:

a) $8 = \frac{80}{10}$ b) 7 c) 52 d) 75 e) 12 f) 15

3. Escribe en forma decimal:

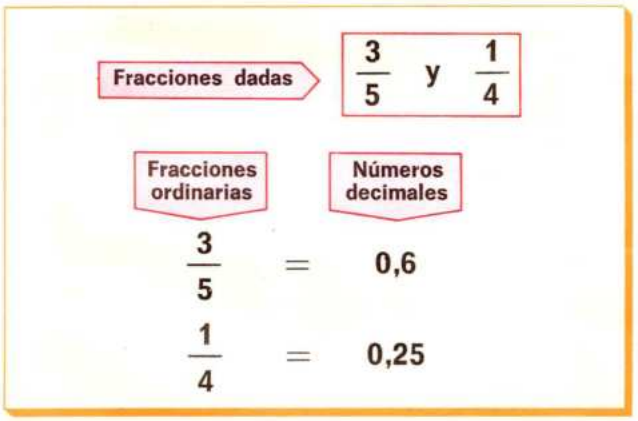
a) $\frac{34}{10}$ b) $\frac{34}{100}$ c) $\frac{34}{1000}$ d) $\frac{34}{10000}$ e) $\frac{6}{100}$

3. Fracciones decimales y números decimales. III

Cómo se convierte una fracción ordinaria en un número decimal.

Fracciones dadas $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{4}$

Fracciones ordinarias		Números decimales
$\frac{3}{5}$	=	0,6
$\frac{1}{4}$	=	0,25



Las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{4}$ son fracciones ordinarias.

Observa cómo se convierten en números decimales.

$$30 \,\underline{|\,5}\ \ 0{,}6 \longrightarrow \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad 10 \,\underline{|\,4}\ \ 0{,}25 \longrightarrow \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Para convertir una fracción ordinaria en número decimal se divide el numerador por el denominador.

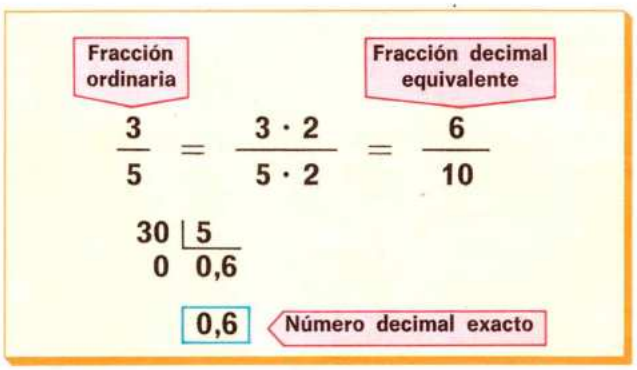
Números decimales exactos y números decimales periódicos.

Fracción ordinaria — Fracción decimal equivalente

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 5 \\ \hline 0 & 0{,}6 \end{array}$$

$\boxed{0{,}6}$ Número decimal exacto



Al convertir una fracción ordinaria en número decimal pueden ocurrir dos casos:

PRIMER CASO

Que la fracción ordinaria sea equivalente a la fracción decimal

La fracción $\frac{3}{5}$ es equivalente a la fracción decimal $\frac{6}{10}$

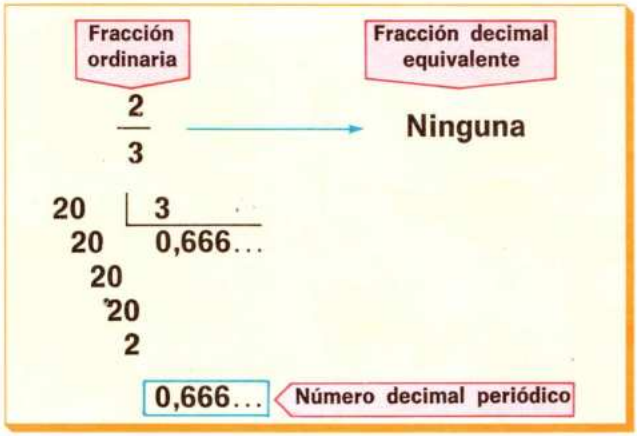
Por eso el número decimal que resulta, **0,6,** es un **número decimal exacto.**

Fracción ordinaria — Fracción decimal equivalente

$$\frac{2}{3} \longrightarrow \text{Ninguna}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 20 & 0{,}666\ldots \\ 20 & \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

$\boxed{0{,}666\ldots}$ Número decimal periódico



SEGUNDO CASO

Que la fracción ordinaria no sea equivalente a la fracción decimal

La fracción $\frac{2}{3}$ no es equivalente a ninguna fracción decimal.

Por eso el número decimal que resulta, **0,666...**, no es exacto, sino un **número decimal periódico.**

El número 0,666..., donde los puntos suspensivos indican que la cifra 6 se repite indefinidamente, se escribe también así **0,6**. La cifra o grupo de cifras que se repite se llama **período.**

Se llama número decimal exacto al número decimal que tiene un número limitado de cifras decimales significativas.
Se llama número decimal periódico al número decimal en el que hay una o varias cifras decimales que se repiten a partir de un cierto lugar.

Actividades

1. ¿Qué lugar ocupan las décimas en relación con la coma?
¿Y las centésimas? ¿Y las milésimas?

2. Escribe cómo se leen estos números:

a) 34,256 → treinta y cuatro enteros doscientas cincuenta y seis milésimas.

b) 0,42 c) 2,85 d) 0,001 e) 3,467 f) 44,25

3. ¿Qué valores tiene la cifra 3 en el número 34.235?
¿Depende el valor de una cifra del lugar que ocupa?

4. Haz la descomposición en suma de los siguientes números:

a) $25{,}36 = 20 + 5 + 0{,}3 + 0{,}06$ c) 2,758 e) 27,65

b) 36,28 d) 56,387

5. Escribe seis números decimales iguales a 2,5:

$2{,}5 = 2{,}50 = \ldots$

6. Cada uno de los números decimales siguientes es una centésima mayor que el anterior:

4,5 4,51 4,52 4,53 4,54 4,55 4,56 4,57 4,58 4,59 4,60

Escribe nueve números comprendidos entre 2,6 y 2,7, de modo que cada uno sea una centésima mayor que el anterior.

7. Completa en tu cuaderno hasta conseguir la fracción decimal equivalente a la dada:

a) $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \ldots$ b) $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \ldots$ c) $\frac{3}{2} = \ldots$

8. Escribe en forma decimal los números racionales representados por las siguientes fracciones.
Todas las divisiones son exactas.

a) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{13}{4}$ g) $\frac{13}{25}$ i) $\frac{57}{20}$

b) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{7}{8}$ f) $\frac{7}{5}$ h) $\frac{43}{8}$ j) $\frac{11}{40}$

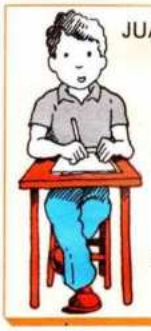
9. Halla la forma decimal de los siguientes números.
Indica en cada caso la cifra o el grupo de cifras que se repite.

a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{4}{7}$ g) $\frac{5}{6}$ i) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{7}$ f) $\frac{8}{11}$ h) $\frac{9}{14}$ j) $\frac{25}{24}$

4. Suma de números decimales

Cómo se suman los números decimales.



JUAN

Suma en forma de fracción

$$2{,}4 + 0{,}85 = \frac{24}{10} + \frac{85}{100} = \frac{240}{100} + \frac{85}{100} = \frac{325}{100} = 3{,}25$$

Observa cómo han hecho Juan y Luisa la suma **2,4 + 0,85.**

Juan hizo la suma con fracciones. Para ello pasó cada sumando a fracción decimal y después sumó estas fracciones.

Suma en forma decimal

$$\begin{array}{r} 2{,}4 \\ +\ 0{,}85 \\ \hline 3{,}25 \end{array}$$

LUISA

Luisa hizo directamente la suma en forma decimal, colocando los sumandos de modo que las comas quedaran unas debajo de las otras.

Los dos obtuvieron el mismo resultado: **3,25.**

Para sumar varios números decimales:

- **Primero se escriben unos debajo de otros, de modo que se correspondan las unidades del mismo orden.**
- **Después se suman como si fueran números naturales y se pone la coma en el resultado bajo la columna de las comas.**

1. Calcula en forma decimal:

a) 2,5 + 3,6
b) 32,5 + 28,6 + 12,75
c) 8,2 + 4,6 + 2,1
d) 428,5 + 32,6
e) 26,8 + 35,75
f) 426,35 + 106,843

2. Calcula:

a) $\frac{12}{10} + \frac{7}{100}$ b) 1,2 + 0,07 c) $\frac{74}{10} + \frac{8}{100}$ d) 7,4 + 0,08

¿Has obtenido el mismo resultado en a) y en b)? ¿Y en c) y en d)?

3. Expresa en forma de número decimal las fracciones $\frac{47}{10}$ y $\frac{49}{100}$ y suma los números decimales obtenidos. Calcula después $\frac{47}{10} + \frac{49}{100}$ y comprueba los dos resultados obtenidos.

4. Calcula $\frac{3}{2} + \frac{7}{5}$:

a) Sumando las fracciones y escribiendo el resultado en forma decimal.
b) Reduciendo $\frac{3}{2}$ y $\frac{7}{5}$ a decimales y sumando estos decimales.
c) ¿Se obtiene el mismo resultado en a) y en b)?

5. De un depósito con agua se sacan 184,5 litros y después 128,75 litros; finalmente se sacan 84,5 litros. Al final quedan en el depósito 160 litros.

¿Qué cantidad de agua había en el depósito?

5. Resta de números decimales

Cómo se restan los números decimales.

Resta en forma de fracción

$$8{,}6 - 3{,}25 = \frac{86}{10} - \frac{325}{100} = \frac{860}{100} - \frac{325}{100} = \frac{535}{100} = 5{,}35$$

Resta en forma decimal

$$\begin{array}{r} 8{,}6 \\ -\ 3{,}25 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 8{,}60 \\ -\ 3{,}25 \\ \hline 5{,}35 \end{array}$$

PRIMER CASO

Cuando el minuendo y el sustraendo son números decimales

Sea la resta **8,6 − 3,25.**

Observa que, al igual que en la suma, la resta se puede hacer de dos formas:

- **Resta en forma de fracción.** Los dos términos de la resta se pasan a fracciones decimales.
- **Resta en forma decimal.** Los dos términos de la resta se escriben con el mismo número de cifras decimales y después se restan.

Resta en forma de fracción

$$9 - 2{,}36 = 9 - \frac{236}{100} = \frac{900 - 236}{100} = \frac{664}{100} = 6{,}64$$

Resta en forma decimal

$$\begin{array}{r} 9 \\ -\ 2{,}36 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 9{,}00 \\ -\ 2{,}36 \\ \hline 6{,}64 \end{array}$$

SEGUNDO CASO

Cuando el minuendo es un número entero y el sustraendo es un número decimal

Sea la resta **9 − 2,36.**

Esta resta también se puede hacer de dos formas:

- **Resta en forma de fracción.** Para ello se escribe el decimal en forma de fracción decimal y se resta del entero.
- **Resta en forma decimal.** Para ello se escribe el minuendo en la forma 9 = 9,00 y después se restan.

Para restar números decimales:

- **Primero se escriben el minuendo y el sustraendo de modo que las comas estén en columna. Si los números no tienen igual número de cifras decimales, se completan con ceros las cifras que faltan.**
- **Después se restan como si fueran números naturales y se pone la coma en el resultado bajo la columna de las comas.**

1. Calcula:

a) 3,6 − 2,1 b) 7,25 − 3,48 c) 34,5 − 12,79 d) 8 − 3,25

2. Ordena de menor a mayor estos números:

6,4 6,004 6,0004 6,04 5,4 5,98 6 6,024

3. Expresa en forma de número decimal las fracciones $\frac{49}{10}$ y $\frac{72}{100}$ y resta los números decimales obtenidos. Después calcula $\frac{49}{10} - \frac{72}{100}$ y compara los resultados obtenidos. ¿Qué observas?

6. Problemas con sumas y restas combinadas

Cálculo del término desconocido.

Término desconocido o incógnita

$$x + 34{,}5 = 87$$

$$x = 87 - 34{,}5 = 52{,}5$$

Observa estas relaciones entre los términos de la sustracción:

$$m = s + d \rightarrow d = m - s \rightarrow s = m - d$$

Estas relaciones permiten calcular un término desconocido de una suma o de una resta. El término desconocido lo designaremos por **x**, y lo llamaremos **incógnita.**

Así, en la igualdad $x + 34{,}5 = 87$, **x** es la **incógnita.**

EJEMPLO PRIMERO

Calcula **x**:

$$x + 34{,}5 = 87$$

$$x = 87 - 34{,}5 = 52{,}5$$

EJEMPLO SEGUNDO

Calcula **x**:

$$22{,}75 - x = 14{,}3$$

$$x + 14{,}3 = 22{,}75$$

$$x = 22{,}75 - 14{,}3 = 8{,}45$$

EJEMPLO TERCERO

Calcula **x**:

$$x + 3{,}4 - 2{,}5 = 1$$

$$x + 0{,}9 = 1$$

$$x = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

1. Calcula x en:

a) $x + 0{,}18 = 1{,}032$
b) $3{,}5 + x = 5{,}71$
c) $2{,}6 + x = 4{,}28$
d) $x + 48{,}72 = 104{,}8$
e) $34{,}8 + x = 72{,}3$
f) $96 + x = 754{,}2$

2. Escribe en forma de suma y luego calcula x:

a) $18 - x = 7{,}3$
b) $72{,}5 - x = 8{,}72$
c) $46{,}5 - x = 12{,}25$
d) $5 - x = 1{,}03$
e) $x - 6{,}2 = 2{,}35$
f) $7{,}2 - x = 3{,}28$

3. ¿Qué número hay que restar a 32,75 para que dé 13,26?

$32{,}75 - x = 13{,}26$

4. ¿Qué número hay que restar a 84,26 para que dé 23,71?

5. A la suma 12,5 y 13,6 se le restó un número y resultó 7. ¿Qué número se restó?

6. Ya sabes que en un cuadro mágico la suma de los números de cada columna es igual a la suma de los números de cada fila e igual a la suma de los números de cada diagonal.

Completa estos cuadros mágicos:

113,55	101,30	110,05
104,80	108,30	111,80

48,99		46,97
43,94		47,98
	50	42,93

Actividades

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. ¿Cuántas décimas tienen 4 unidades? ¿Y 7 unidades?
2. ¿Cuántas centésimas tienen 2 unidades? ¿Y 3 décimas?
3. ¿Cuántas milésimas tienen 3 unidades? ¿Y 4 décimas? ¿Y 2 centésimas?
4. ¿Cuántas diezmilésimas tienen 2 milésimas? ¿Y 2 centésimas?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe en forma decimal los resultados:

a) $\frac{500}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{8}{1000}$ b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{10} + \frac{4}{100}$

2. Escribe en forma de fracción:

a) 0,5 b) 0,05 c) 0,005 d) 0,0005

3. Escribe en forma decimal:

a) $\frac{2}{10}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{7}{6}$ e) $\frac{7}{8}$ f) $\frac{8}{3}$

4. Agrega un cero a la derecha de 0,75. ¿Cómo son 0,75 y el número obtenido?

5. ¿Cuál es la suma de cinco números si el primero es 578,32 y cada uno de los siguientes es igual al anterior más 127,45?

6. Escribe tres números de cuatro cifras con las cifras 6, 0, 3, 1 tomadas en este orden y que sean menores que 700. Ejemplo: 603,1.

7. Luis ha medido en su balanza las masas de sus útiles de colegio y resultó:

cartera vacía → 0,5 kg
libros → 3,17 kg
cuaderno → 0,86 kg
lapiceros y bolígrafos → 0,34 kg
cartera llena → 4,97 kg

Su padre le dijo que se había equivocado. ¿En qué?

8. Coloca en cada casilla del cuadro el resultado de la operación que se indica y obtendrás un cuadro mágico.

ⓐ 0,52 + 0,57 ⓑ 1 − 0,12 ⓒ 1,5 − 0,47

ⓓ 0,17 + 0,17 + 0,6 ⓔ 0,35 + 0,65 ⓕ 2,5 − 1,44

ⓖ 1,75 − 0,78 ⓗ 6,1 − 4,98 ⓘ 2 − 1,09

ⓐ	ⓑ	ⓒ
ⓓ	ⓔ	ⓕ
ⓖ	ⓗ	ⓘ

TEMA 13 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN CON DECIMALES

1. Cómo se multiplica con números decimales

PRIMER CASO

Multiplicación de un número decimal por la unidad seguida de ceros: 10, 100, 1.000, ...

La multiplicación de un decimal, por ejemplo **0,32**, por 10, 100 ó 1.000 se puede hacer de dos formas:

MULTIPLICACIÓN EN FORMA DE FRACCIÓN

$$0{,}32 \cdot 10 = \frac{32}{100} \cdot 10 = \frac{320}{100} = \frac{32}{10} = 3{,}2$$

$$0{,}32 \cdot 100 = \frac{32}{100} \cdot 100 = \frac{3200}{100} = 32$$

$$0{,}32 \cdot 1.000 = \frac{32}{100} \cdot 1.000 = \frac{32000}{100} = 320$$

MULTIPLICACIÓN EN FORMA DECIMAL

$0{,}32 \cdot 10 = 3{,}2$

$0{,}32 \cdot 100 = 32$

$0{,}32 \cdot 1.000 = 320$

Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros: 10, 100, 1.000, se desplaza la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga la unidad.

SEGUNDO CASO

Multiplicación de dos números decimales.

El producto de dos números decimales, como **4,2** y **0,35**, se puede hacer de dos formas:

MULTIPLICACIÓN EN FORMA DE FRACCIÓN

$$\underset{\downarrow}{4{,}2} \cdot \underset{\downarrow}{0{,}35}$$

$$\frac{42}{10} \cdot \frac{35}{100} = \frac{42 \cdot 35}{10 \cdot 100} = \frac{1470}{1000} = 1{,}470$$

MULTIPLICACIÓN EN FORMA DECIMAL

$$\begin{array}{r} 4{,}2 \\ \times\, 0{,}35 \\ \hline 210 \\ 1\,26 \\ \hline 1{,}470 \end{array}$$

4,2 → 1 cifra decimal

× 0,35 → + 2 cifras decimales

3 cifras decimales

Para multiplicar dos números decimales, se efectúa la operación como si fueran números naturales y del producto se separan tantas cifras como cifras decimales tengan los dos factores.

TERCER CASO

Multiplicación de un número decimal por un número natural.

El producto **42** × **0,35** se puede hacer de dos formas.

MULTIPLICACIÓN EN FORMA DE FRACCIÓN

$$\underset{\downarrow}{42} \cdot \underset{\downarrow}{0{,}35}$$

$$42 \cdot \frac{35}{100} = \frac{42 \cdot 35}{100} = \frac{1470}{100} = 14{,}70$$

MULTIPLICACIÓN EN FORMA DECIMAL

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times\, 0{,}35 \\ \hline 2\,10 \\ 12\,6 \\ \hline 14{,}70 \end{array}$$

Dos cifras decimales

Para multiplicar un número decimal por un entero natural, se efectúa la operación como si fueran números naturales y del producto se separan tantas cifras como cifras decimales tenga el factor decimal.

Actividades

1. Calcula y contesta:

a) $\frac{1}{10}$ de 624 $\quad$ $\frac{1}{100}$ de 624 $\quad$ $\frac{1}{1000}$ de 624

b) 0,1 · 624 $\quad$ 0,01 · 624 $\quad$ 0,001 · 624

¿Se obtiene el mismo resultado en a) y en b)? ¿Por qué?

2. Calcula:

a) 0,25 · 0,34 $\quad$ c) 6,8 · 3,45 $\quad$ e) 3 · 25,8 $\quad$ g) 26 · 37,8

b) 3,25 · 2,4 $\quad$ d) 6,25 · 0,45 $\quad$ f) 18 · 346,5 $\quad$ h) 46,25 · 38

3. Calcula 13 décimas de 165,35.

4. ¿Hacia dónde se desplaza la coma al multiplicar por 100 un número decimal?

5. Si una caja pesa 28,75 kg ¿cuánto pesan 10 cajas?

6. El profesor propone hacer esta multiplicación: 600 · 0,42.

Luis operó así: 600 · 0,42 = (6 · 100) · 0,42 = 6 · (100 · 0,42) = 6 · 42 = 252.

Calcula, operando como Luis, 800 · 0,63.

7. Un camión transporta 3 masas de mármol de 1,34 t cada una.

¿Cuántas toneladas de mármol lleva el camión? ¿Cuántos kilogramos?

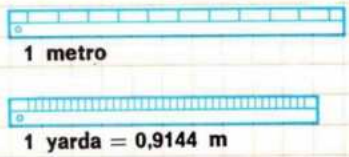
(Recuerda que 1 t = 1.000 kg).

8. En una carrera el circuito mide 6,75 km. Si se han de dar 10 vueltas ¿cuál es la distancia que han de recorrer los corredores?

9. La yarda es una longitud inglesa que mide 0,9144 metros.

¿Cuál es la longitud en metros de un camino que mide 1.000 yardas?

¿Cuál es la diferencia en milímetros entre 1 m y una yarda?



10. Se tienen 240 cajas con 25 bolsas de café cada una. Si cada bolsa pesa 0,62 kg ¿cuál es el peso del café?

11. Los alimentos que tomamos nos aportan calorías. Laura sigue un régimen de adelgazamiento y no puede pasar en cada comida de 700 calorías.

Un día Laura comió: 1 panecillo de 125 g, 140 g de espárragos, 45 g de queso blanco y una manzana de 130 g.

Si 1 gramo de pan da 3,3 calorías, 1 g de espárragos 0,32, 1 g de queso blanco 1,2 y 1 g de manzana 0,52 ¿respetó Laura su régimen?

12. ¿Cuánto pesan 7 hl de aceite si cada litro pesa 0,92 kg?

2. Cómo se divide con números decimales. I

$$36 : 10 = \frac{36}{10} = 3{,}6$$

$$36 : 100 = \frac{36}{100} = 0{,}36$$

$$36 : 1.000 = \frac{36}{1000} = 0{,}036$$

PRIMER CASO

Cuando el dividendo es un número natural y el divisor es la unidad seguida de ceros.

Cuando se divide un número natural por 10, 100, 1.000, ... se convierte el número en una fracción decimal.

Observa las divisiones 36 : 10; 36 : 100 y 36 : 1.000.

Para dividir un número natural por la unidad seguida de ceros: 10, 100, 1.000, ..., se separan con una coma, a partir de la derecha, tantos lugares como ceros tenga la unidad.

SEGUNDO CASO

Cuando el dividendo es decimal y el divisor es la unidad seguida de ceros.

Vamos a dividir **4,2** por 10 y por 100:

Observa las dos formas de hacer esta división:

DIVISIÓN EN FORMA DECIMAL

$4{,}2 : 10 = 0{,}42$

$4{,}2 : 100 = 0{,}042$

DIVISIÓN EN FORMA DE FRACCIÓN

$$4{,}2 : 10 = \frac{42}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{42}{100} = 0{,}42$$

$$4{,}2 : 100 = \frac{42}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{42}{1000} = 0{,}042$$

Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros: 10, 100, 1.000, ..., se desplaza la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros tenga la unidad.

TERCER CASO

Cuando el dividendo es un decimal y el divisor es un número natural.

Una cinta de 7,32 metros se divide en 4 trozos iguales.

¿Cuánto mide cada trozo?

Hay que hacer la división **7,32 : 4.**

Observa las dos formas de hacer esta división:

DIVISIÓN EN FORMA DECIMAL

7,32	4
33	1,83
12	
0	

DIVISIÓN EN FORMA DE FRACCIÓN

$$\frac{7{,}32}{} : 4 = \frac{732}{100} : 4 = \frac{732}{100} \cdot \frac{1}{4} = \frac{732}{400}$$

732	400
3320	1,83
1200	
000	

Mediante fracciones, la división 7,32 : 4 se reduce a la división 732 | 400

Cada trozo de cinta mide 1,83 metros.

Para dividir un número decimal por un número natural, se hace la división como si el dividendo y el divisor fueran números naturales, pero se pone una coma en el cociente al bajar la primera cifra decimal.

3. Cómo se divide con números decimales. II

CUARTO CASO

Cuando el dividendo es un número natural y el divisor es un decimal.

Sea la división **1.296 : 1,8**.

Observa las dos formas de hacer esta división:

DIVISIÓN EN FORMA DECIMAL

$$1.296 \mid 1{,}8$$

$\times 10$ $\qquad$ $\times 10$

$$12.960 \mid 18$$
$$0\ 36 \quad 720$$
$$00$$

DIVISIÓN EN FORMA DE FRACCIÓN

$$1.296 : 1{,}8$$
$$1.296 : \frac{18}{10} = 1.296 \cdot \frac{10}{18} =$$
$$= \frac{12960}{18} = 12.960 \mid 18$$

Esta última división indica que se suprime la coma del divisor y se agrega un cero al dividendo.

Para dividir un número natural por un número decimal, se suprime la coma del divisor y a la derecha del dividendo se ponen tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor. Después se continúa la división como si fueran números naturales.

QUINTO CASO

Cuando el dividendo y el divisor son números decimales.

Sea la división **10,83 : 1,9**.

Observa las dos formas de hacer esta división:

DIVISIÓN EN FORMA DECIMAL

$$10{,}83 \mid 1{,}9$$

$\times 10$ $\qquad$ $\times 10$

$$108{,}3 \mid 19$$
$$13\ 3 \quad 5{,}7$$
$$0\ 0$$

DIVISIÓN EN FORMA DE FRACCIÓN

$$10{,}83 : 1{,}9$$
$$\frac{1083}{100} : \frac{19}{10} = \frac{1083}{100} \cdot \frac{10}{19} =$$
$$= \frac{1083}{10} : 19 = 108{,}3 \mid 19$$

Esta última división indica que se suprime la coma del divisor y se desplaza la coma del dividendo un lugar a la derecha.

Para dividir dos números decimales, se suprime la coma del divisor y se desplaza la coma del dividendo tantos lugares a la derecha como cifras decimales tenga el divisor.

1. Haz las siguientes divisiones:

a) $1.225 \mid 0{,}7$ $\qquad$ b) $1.225 \mid 0{,}35$ $\qquad$ c) $361 \mid 1{,}9$

d) $196 \mid 1{,}4$ $\qquad$ e) $10{,}24 \mid 1{,}6$ $\qquad$ f) $102{,}4 \mid 0{,}32$

g) $1{,}024 \mid 0{,}16$ $\qquad$ h) $23{,}8 \mid 0{,}13$ $\qquad$ i) $9{,}72 \mid 3{,}6$

j) $9{,}72 \mid 0{,}18$ $\qquad$ k) $9{,}72 \mid 0{,}09$ $\qquad$ l) $12{,}96 \mid 1{,}8$

4. Potencia de un número racional. I

Potencia de una fracción.

Observa el siguiente producto de fracciones:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

Todos los factores son iguales, y este producto, como en el caso de los números naturales, se llama potencia (ver tema 3).

En la potencia $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ la base $\left(\frac{2}{3}\right)$ es la fracción que se repite como factor.

El exponente **(4)** indica el número de veces que se repite la base.

Producto de factores iguales a $\frac{2}{3}$ | Potencia de la fracción $\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

Base $\frac{2^4}{3}$ Exponente

Cómo se eleva una fracción a una potencia.

Calculemos $\left(\frac{2}{3}\right)^4$:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{2^4}{3^4}$$

Luego $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

POTENCIA DE EXPONENTE 0

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1} \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$$

POTENCIA DE EXPONENTE 1

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}} \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{3}{5}$$

Como en el caso en que la base es un número natural se tiene que:

- Toda potencia de exponente 0 es igual a la unidad.
- Toda potencia de exponente 1 es igual a la base.

Potencia de exponente n de una fracción es el producto n veces de esa fracción. Para elevar una fracción a una potencia se elevan a dicha potencia el numerador y el denominador.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

1. Escribe los siguientes productos en forma de potencias:

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$ c) $\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}$

2. Escribe las siguientes potencias en forma de producto y calcula el resultado:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1\cdot1}{3\cdot3} = \frac{1}{9}$ b) $\left(\frac{6}{5}\right)^2$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ d) $\left(\frac{1}{10}\right)^5$

5. Potencia de un número racional. II

POTENCIAS DE BASE DECIMAL

$(0,3)^2 = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$

$(0,2)^3 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$

$(0,12)^3 = 0,12 \cdot 0,12 \cdot 0,12 = 0,001728$

Cómo se calcula la potencia de un decimal.

Observa el resultado de cada una de las potencias

$(0,3)^2$, $(0,2)^3$, $(0,12)^3$

Observa la relación que hay entre el número de cifras decimales de la base y el número de cifras decimales del resultado:

Potencia	Exponente × núm. de cifras decimales de la base	Núm. de cifras decimales del resultado	Resultado
$(0,3)^2$	$2 \times 1 = 2$	2	0,09
$(0,2)^3$	$3 \times 1 = 3$	3	0,008
$(0,12)^3$	$3 \times 2 = 6$	6	0,001728

Observa que en la potencia $(0,12)^3 = 0,001728$ el número de cifras decimales (seis) se obtiene multiplicando el exponente (3) por el número de cifras decimales (dos) de la base.

Para calcular una potencia de base decimal se calcula como si la base fuera un número entero y del resultado se separan tantas cifras decimales como indica el producto del exponente por el número de cifras decimales de la base.

1. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) $(0,5)^3$ b) $(0,1)^5$ c) $(0,01)^5$ d) $(0,01)^4$ e) $(0,6)^1$ f) $(0,8)^0$

2. Escribe cada una de las siguientes fracciones como potencia de una fracción.

Observa que los términos de cada fracción son cuadrados perfectos.

a) $\frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ b) $\frac{9}{16}$ c) $\frac{9}{25}$ d) $\frac{25}{36}$ e) $\frac{25}{49}$

3. Sabiendo que $5^2 = 25$; $6^2 = 36$; $13^2 = 169$; $12^2 = 144$; $15^2 = 225$, calcula el valor de las siguientes potencias sin hacer ninguna operación.

a) $(0,5)^2$ c) $(0,06)^2$ e) $(1,3)^2$ g) $(1,2)^2$ i) $(0,15)^2$

b) $(0,05)^2$ d) $(0,13)^2$ f) $(0,013)^2$ h) $(0,12)^2$ j) $(0,015)^2$

4. ¿Es cierto que el cuadrado de un número decimal tiene siempre un número par de cifras decimales?

Razona tu contestación.

5. Calcula en cada caso el valor del exponente n:

a) $(0,01)^n = 0,00000001$ c) $(0,01)^n = 0,0000000001$

b) $(0,005)^n = 0,000000000625$ d) $(0,02)^n = 0,000000000064$

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula:

① $0{,}5 \times 10$	⑥ $12 : 10$	⑪ $46 : 100$	⑯ $3{,}4 \times 10$
② $0{,}25 \times 100$	⑦ $15 : 10$	⑫ $56 : 100$	⑰ $3{,}4 \times 100$
③ $1{,}6 \times 10$	⑧ $18 : 10$	⑬ $34 : 10$	⑱ $3{,}4 \times 1.000$
④ $1{,}8 \times 10$	⑨ $25 : 100$	⑭ $34 : 100$	⑲ $0{,}35 \times 100$
⑤ $5 : 10$	⑩ $32 : 100$	⑮ $34 : 1.000$	⑳ $35 : 100$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Sabiendo que $25 \times 36 = 900$, calcula sin hacer operaciones:

a) $2{,}5 \times 36$ b) $2{,}5 \times 3{,}6$ c) $0{,}25 \times 36$ d) $25 \times 0{,}36$ e) $0{,}25 \times 0{,}36$

2. Sabiendo que $32{,}4 : 1{,}2 = 27$, calcula sin hacer operaciones:

a) $3{,}24 : 0{,}12$ b) $3.240 : 12$ c) $324 : 120$ d) $324 : 12$

3. Calcula los $\frac{2}{3}$ de 12,96.

4. Los $\frac{2}{5}$ de un número es 1,56. ¿Cuál es este número?

5. ¿Cuál es el número cuya sexta parte es 5,7?

6. Cuando se multiplican dos enteros naturales distintos de 0 y de 1, el producto que resulta es mayor que cada uno de ellos. Pero cuando se multiplican dos decimales menores que 1 ocurre que el producto es menor que cada uno de los factores.

Esto ocurre al multiplicar dos números decimales comprendidos entre 0 y 1.

Así: $0{,}75 \times 0{,}75 = 0{,}5625$, y $0{,}5625 < 0{,}75$.

Comprueba este hecho realizando las siguientes multiplicaciones:

a) $0{,}5 \times 0{,}7$ b) $0{,}9 \times 0{,}8$ c) $0{,}9 \times 0{,}5$ d) $0{,}56 \times 0{,}32$

7. Escribe dos números decimales cuyo producto sea mayor que cada uno de los factores.

8. Si un número decimal se divide por la unidad seguida de ceros ¿hacia dónde se desplaza la coma? ¿Y si el número decimal se multiplica por la unidad seguida de ceros?

9. ¿Cuántos kilos de azúcar hay en 600 sobres si cada sobre contiene 0,03 kg de azúcar?

10. Dos cuerdas juntas miden 84,8 metros. Si una mide 158 dm más que la otra ¿cuánto mide cada una?

11. Un depósito que tiene 40,5 litros de vino se vacía en tres garrafas iguales quedando las tres garrafas completamente llenas. ¿Cuál es la capacidad de cada garrafa?

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

El LOBO, LA OVEJA Y LAS LECHUGAS

Un hombre lleva un lobo, una oveja y una cesta de lechugas. Tiene que atravesar un río en una barca, pero no le dejan pasar al hombre más que yendo solo, con un solo animal o con la cesta.

¿Cómo puede transportar todo a la otra orilla en varias travesías sin dejar solos al lobo con la oveja ni a la oveja con la cesta de las lechugas?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. ¿Cuánto vale 0,75 kg de azúcar a 60 ptas. el kilogramo?

2. ¿Cuántos kilogramos de café hay en 56 bolsas de 0,25 kg cada una?

3. ¿Cuánto valen 4 kg de azúcar a 60,50 ptas. cada kilogramo?

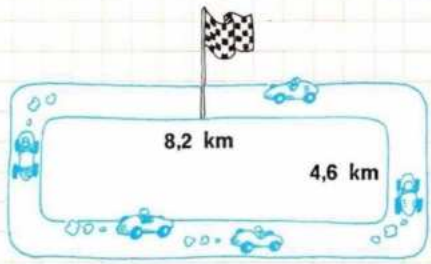
4. Una persona avanza en cada paso 0,8 m. Cuando ha dado 1.200 pasos ¿cuántos metros ha recorrido?

5. Un alambre de 80 m se desea dividir en trozos de 0,8 m.
   ¿Cuántos trozos resultan?

6. En una empresa hay un socio que tiene $\frac{3}{10}$ del capital. Si el capital es de 12 millones ¿qué cantidad corresponde a este socio?

7. Tres cubas iguales de agua pesan 4,8 toneladas.
   ¿Cuántas toneladas pesa cada cuba?

8. En una carrera el circuito tiene la forma y las dimensiones que indica la figura.
   La carrera consiste en dar 8 vueltas al circuito.
   ¿Cuántos kilómetros han de recorrer los participantes que terminen la carrera?



9. ¿Cuántos viajes necesita hacer una furgoneta para transportar 60 toneladas si en cada viaje carga 0,6 toneladas?

10. Tres barras de hierro tienen una masa de 12,48 kg.
    ¿Cuál es la masa de una barra? ¿Y la masa de 100 barras?

11. Un bloc de 100 hojas de papel tiene un espesor de 8 mm.
    ¿Cuál será el espesor de una hoja? ¿Cuál será el espesor de un bloc de 500 hojas?

12. Con el vino producido en una viña se han llenado 250 cajas de 10 botellas cada caja. Cada botella tiene 1 litro.
    ¿Cuántos litros de vino ha producido la viña?
    Si las botellas hubieran sido de 0,75 litros, ¿cuántas botellas se habrían llenado?

TEMA 14 PORCENTAJES. INTRODUCCIÓN A LA PROPORCIONALIDAD

1. Introducción a la proporcionalidad

TABLA 1

Número de huevos	1	2	3	4	5	6	7
Valor en pesetas	5	10	15	20	25	30	35

TABLA 2

1	2	3	4	5	6	7	× 5
5	10	15	20	25	30	35	

TABLA 3

: 5	1	2	3	4	5	6	7	× 5
	5	10	15	20	25	30	35	

Series de números proporcionales.

Se sabe que 1 docena de huevos vale 60 ptas.

¿Cuánto vale 1 huevo? ¿Y 2 huevos? ¿Y 3 huevos?

1 huevo vale $60 : 12 = 5$ ptas.

Por lo tanto:

2 huevos valen → $2 \cdot 5 = 10$ ptas.

3 huevos valen → $3 \cdot 5 = 15$ ptas.

4 huevos valen → $4 \cdot 5 = 20$ ptas.

De esta forma se puede completar la tabla 1.

En la tabla 2 se observa que se puede pasar de los números de la primera fila a los números de la segunda fila multiplicando por 5. En la tabla 3 se observa que se puede pasar de la fila segunda a la fila primera dividiendo por 5.

Se dice por eso que las dos series de números:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35

son proporcionales, y también que estas tablas son tablas de proporcionalidad.

Dos series de números son proporcionales cuando existe un operador de multiplicar o un operador de dividir que permite pasar de una serie a la otra.

1. Completa las siguientes tablas de proporcionalidad:

a)

× ...	3	4	6	8	10
21					

c)

× ...	0,1	2,5	3	3,5	3,8
1					

b)

× ...	6		6		9
12	20		32		

d)

× ...	3	5	6		9
12			32		

2. Resuelve:

Se quiere preparar una tarta para 6 personas. La receta para 4 personas necesita 200 g de harina, 180 g de mantequilla, 4 huevos y 120 g de azúcar.

Las cantidades de ingredientes para 4 personas y para 6 personas forman dos series proporcionales.

× 3/2	harina	mantequilla	huevos	azúcar
	200	180	4	120

El operador multiplicativo que permite pasar de la primera fila a la segunda es el mismo que permite pasar de 4 a 6.

4 → 6 este operador es $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Completa la segunda fila de la tabla.

2. Porcentajes o tantos por ciento

Fracciones decimales de denominador 100		Porcentajes
$\frac{6}{100}$	=	6 %
$\frac{13}{100}$	=	13 %
$\frac{25}{100}$	=	25 %

Concepto de porcentaje.

Las fracciones $\frac{6}{100}$, $\frac{13}{100}$, $\frac{25}{100}$, ... indican que de cada 100 partes se han tomado 6, 13, 25, ... partes. Estas fracciones decimales de denominador 100 también se llaman **porcentajes** o **tantos por ciento**, y se escriben también así:

6 %, 13 %, 25 %

$\frac{6}{100} = 6\ \%$, que se lee **6 por ciento.**

$\frac{13}{100} = 13\ \%$, que se lee **13 por ciento.**

Un porcentaje o tanto por ciento es una fracción de denominador 100.

Cómo se escribe un número en forma de porcentaje.

① $2 = \frac{200}{100} = 200\ \%$

$3 = \frac{300}{100} = 300\ \%$

② $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 60\ \%$

$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\ \%$

③ $\frac{3}{5} = 0{,}6 = \frac{60}{100} = 60\ \%$

$\frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{75}{100} = 75\ \%$

① Observa cómo se transforma en porcentaje un número natural.

② Si se trata de un número decimal, se escribe en forma de fracción de denominador 100, o también se multiplica el decimal por 100.

Ejemplo $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 60\ \%$

$0{,}6 \times 100 = 60\ \%$

③ Si se trata de una fracción, se pasa a decimal:

$\frac{3}{5} \rightarrow \begin{array}{r|l} 3 & 5 \\ 0 & 0{,}6 \end{array} \rightarrow \frac{3}{5} = 0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 60\ \%$

Para transformar una fracción a porcentaje se pasa la fracción a decimal.

1. Escribe con el símbolo de porcentajes las siguientes fracciones:

$\frac{7}{100}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{42}{100}$ $\frac{56}{100}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{8}{10}$ $\frac{9}{100}$ $\frac{75}{10}$

2. Escribe en forma de porcentajes:

0,25 0,75 2 3 5 0,1 0,2 $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$

$$20\ \%\ \text{de}\ 2.500 = \frac{20 \cdot 2.500}{100} = 500$$

$$20\ \%\ \text{de}\ 1.800 = \frac{20 \cdot 1.800}{100} = 360$$

$$20\ \%\ \text{de}\ 1.000 = \frac{20 \cdot 1.000}{100} = 200$$

$$20\ \%\ \text{de}\ 2.400 = \frac{20 \cdot 2.400}{100} = 480$$

2.500	1.800	1.000	2.400
500	360	200	480

× 0,2

Cómo se calcula el tanto por ciento de una cantidad.

En una tienda figura el siguiente cartel:

Un cliente anota los precios de los siguientes artículos:

Pantalón, 2.500 ptas. Camisa, 1.800 ptas. Corbata, 1.000 ptas. Jersey, 2.400 ptas.

Para averiguar el dinero que le rebajan en cada artículo hace la siguiente tabla:

	Pantalón	Camisa	Corbata	Jersey
Precios	2.500	1.800	1.000	2.400
Rebajas	500	360	200	480

20 %

Se observa que de la primera fila de números de la tabla se puede pasar a la segunda fila multiplicando por

$$\frac{20}{100} = 0{,}2$$

Por lo tanto, esta tabla es una tabla de proporcionalidad; las dos series de números:

2.500, 1.800, 1.000, 2.400 y 500, 360, 200, 480

son dos series de números proporcionales.

Los problemas de porcentajes se resuelven como los problemas de proporcionalidad.

1. Completa las tablas siguientes y halla el operador multiplicativo en cada caso:

12 %	20	60	80	100	250	1.500	2.000	4.500	× ...

18 %	0,5	1	1,2	3,6	4	6	6,5	18	× ...

2. Calcula el 25 % de:

300 1.000 4.800 6.000 8.000 10.000 12.000

3. Explica por qué el 15 % de 640 es el doble del 15 % de 320.

4. Resuelve:

Laura compró un cuento, un estuche y un bolígrafo, cuyos precios respectivos eran 120 ptas., 300 ptas. y 90 ptas. Le hicieron las siguientes rebajas: el 5 % en el cuento, el 6 % en el estuche y el 8 % en el bolígrafo.

¿Cuánto pagó Laura por su compra?

4. Problemas sobre porcentajes

100	1.200
8	x

$$x = \frac{8 \times 1.200}{100} = 96$$

100	1.200
8	96

PRIMER PROBLEMA

Calcular el tanto por ciento de un número.

El 8 % de los alumnos de un colegio llegan a la clase en autobús. Si hay 1.200 alumnos en el colegio

¿cuántos alumnos van al colegio en autobús?

El problema se reduce a calcular el 8 % de 1.200:

$$8\ \%\ \text{de}\ 1.200 = \frac{8 \cdot 1200}{100} = \frac{9600}{100} = \mathbf{96}$$

Hay 96 alumnos que llegan en autobús.

30	100
6	x

$$x = 100 : 5 = 20$$

30	100
6	20

SEGUNDO PROBLEMA

Calcular qué tanto por ciento es un número respecto de otro.

En una clase de 30 alumnos, 6 de ellos han obtenido la calificación de sobresaliente.

¿Qué tanto por ciento de alumnos sacó sobresaliente?

En la tabla de proporcionalidad se observa que se puede pasar de la primera fila a la segunda dividiendo por 5, ya que $30 : 6 = 5$.

$$x = 100 : 5 = 20$$

El 20 % de los alumnos obtuvo la calificación de sobresaliente.

100	x
2	12

$$x = 12 \cdot 50 = 600$$

100	600
2	12

TERCER PROBLEMA

De qué número es otro número dado un tanto por ciento conocido.

En un pueblo hay 12 personas jubiladas. El alcalde informa que los jubilados representan el 2 % de todos los habitantes del pueblo.

¿Cuántos habitantes tiene el pueblo?

En la tabla de proporcionalidad se observa que se pasa de la segunda fila a la primera multiplicando por 50:

$$x = 12 \cdot 50 = 600$$

El pueblo tiene 600 habitantes.

1. ¿Cuál es el 5 % de 1.000, 3.000, 5.000 y 8.000?

2. Resuelve:

A. De los 800 alumnos de un colegio han ido de viaje 600. ¿Qué porcentaje de alumnos se fue de viaje?

B. En un pueblo el 5 % de los habitantes usan gafas. ¿Cuántos habitantes tiene el pueblo si hay 60 personas que usan gafas?

100	x
5	60

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Halla:

① El 5 % de 100. ② El 6 % de 100. ③ El 8 % de 100. ④ El 5 % de 200. ⑤ El 6 % de 200. ⑥ El 8 % de 200.

2. Observa que el 5 % de 700 $= \frac{5 \cdot 700}{100} = 5 \cdot 7 = 35$.

Es decir, se suprimen los ceros y se multiplica 5 por 7.

Calcula de este modo:

a) El 6 % de 800. b) El 7 % de 900. c) El 8 % de 900.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En la siguiente tabla se dan las características de un coche.

Velocidad en km/h	60	90	120	140
Consumo en litros por cada 100 km	7	8	11	16
Número de revoluciones por minuto	2.400	3.600	4.800	5.600

a) ¿Es proporcional el consumo de gasolina y la velocidad?

b) ¿Es proporcional el número de revoluciones por minuto y la velocidad?

2. Recuerda que en un cuadro mágico la suma de los números de cada fila es igual a la suma de los números de cada columna y también igual a la suma de los números de cada diagonal.

Escribe en las casillas del cuadro los resultados de las operaciones que se indican.

ⓐ 50 % de 32.
ⓑ 20 % de 25.
ⓒ $\frac{100}{3}$ % de 27.
ⓓ 12,5 % de 32.
ⓔ 0,02 · 150.
ⓕ 40 % de 25.
ⓖ $\frac{3}{7} \cdot 14$.
ⓗ 4 % de 375.
ⓘ 8 % de 25.
ⓙ 25 % de 44.
ⓚ 70 % de 10.
ⓛ 20 % de 70.
ⓜ 65 % de 20.
ⓝ $\frac{200}{3}$ % de 12.
ⓞ 24 % de 50.
ⓟ $\frac{2}{5} \cdot 2{,}5$.

ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
ⓔ	ⓕ	ⓖ	ⓗ
ⓘ	ⓙ	ⓚ	ⓛ
ⓜ	ⓝ	ⓞ	ⓟ

3. Al comprar una bicicleta que vale 9.000 ptas. me hacen un descuento del 8 %. ¿Cuánto dinero me rebajan? ¿Cuánto dinero tengo que pagar?

4. En un colegio de 1.200 alumnos, el 40 % son chicas y el resto, chicos. ¿Qué porcentaje de chicos hay? ¿Cuántas chicas hay? ¿Y chicos?

5. Al comprar un televisor que vale 92.500 ptas. me han hecho un descuento del 6 %. ¿Cuánto he de pagar?

6. Un comerciante compra una bicicleta en 4.000 ptas. y la vende en 6.000 ptas. ¿Qué tanto por ciento se ganó?

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

VELOCIDAD DE UNA NOTICIA

Un pueblo tiene 2.550 habitantes. A las 8 de la mañana se enteran de una noticia tres personas del pueblo. Cada persona, en media hora, comunica la noticia a otras tres personas.

¿Cuánto tiempo tarda en saber la noticia todo el pueblo?

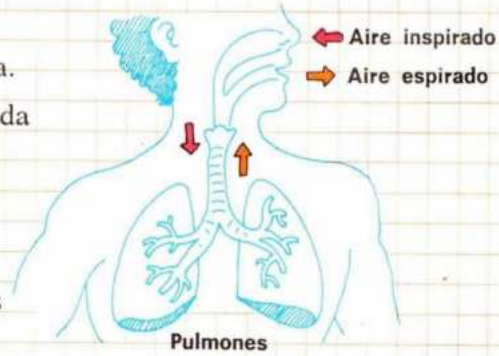
PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. La masa de aire que envuelve a la Tierra es la atmósfera.

El aire es una mezcla de gases. La composición aproximada del aire en volumen es la siguiente:

Nitrógeno ——→ 78 %
Oxígeno ——→ 21 %
Anhídrido carbónico → 0,04 %

y el resto, hasta el 100 por 100, está formado por otros gases raros como el argón y el criptón.



Cuando inspiramos, parte del oxígeno se queda en la sangre, de modo que el aire espirado sólo tiene un 14 % de oxígeno y el 4,5 % de anhídrido carbónico.

- ¿Qué porcentaje de aire está formado por nitrógeno, oxígeno y anhídrido carbónico?
- Una persona adulta respira aproximadamente unas 15 veces por minuto y cada vez introduce en los pulmones dos litros de aire aproximadamente.

  ¿Cuál es la cantidad aproximada de oxígeno que llega a los pulmones en 1 hora?
- ¿Qué cantidad aproximada de anhídrido carbónico llega a los pulmones en 1 hora respirando 15 veces por minuto unos dos litros de aire cada vez?
- ¿Qué cantidad aproximada de anhídrido carbónico sale de los pulmones en 1 hora respirando 15 veces por minuto unos dos litros de aire cada vez?
- ¿Qué cantidad de aire pasa por los pulmones de una persona al cabo de un día?

2. El agua está compuesta de hidrógeno y oxígeno. El 11,11 % del peso del agua es hidrógeno y el resto oxígeno.

¿Qué cantidad de hidrógeno y de oxígeno hay en 7.200 gramos de agua?

3. En una clase de 36 alumnos hay 27 que saben nadar.

¿Cuál es el porcentaje de los alumnos de esta clase que no saben nadar?

4. En un camping hay 1.500 personas que se distribuyen por nacionalidades del modo siguiente:

- El 25 % del total son alemanes.
- El 40 % del resto son franceses.
- El 20 % de los que quedan son suecos.
- El resto son españoles.

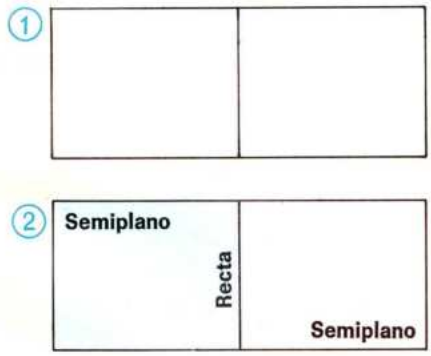
Calcula el número de personas que hay de cada país.

5. Al comprar en una tienda una camisa que vale 2.000 ptas. nos hacen el 15 % de descuento. Para saber lo que tenemos que pagar el tendero hace esta operación: $2.000 \times 0,85 = 1.700$. Así resulta que hemos de pagar 1.700 ptas. Justifica los cálculos del tendero.

TEMA 15 OPERACIONES CON SEGMENTOS

1. Rectas en el plano

Recta y semiplano.

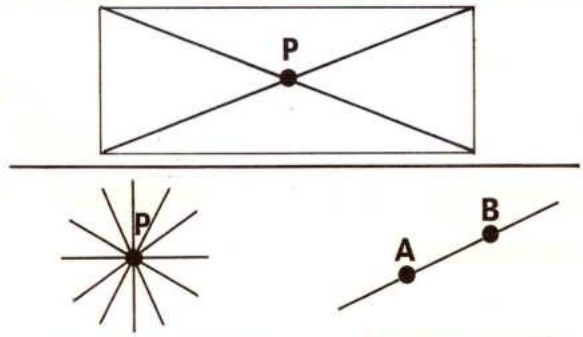


Una hoja de papel puede representar un plano.

① Toma una hoja de papel, dóblala y marca bien el pliegue.

Desdobla la hoja y pasa el lápiz por el pliegue.

② Después colorea de azul uno de los semiplanos y de rojo el otro.



Por un punto pueden pasar infinitas rectas.

Por dos puntos sólo puede pasar una recta.

Una hoja de papel representa un plano y cada pliegue representa una recta.

- Toma una hoja de papel Haz un pliegue y a continuacion otro pliegue que corte al anterior.
- Traza con un lápiz las rectas marcadas y llama **P** al punto de intersección.

¿Puedes trazar más rectas que pasen por el punto **P**?

Por el punto **P** pasan infinitas rectas.

Comprueba que por dos puntos **A** y **B** sólo pasa una recta.

Una recta divide a un plano en dos partes llamadas semiplanos.
La recta es la frontera o el borde de los dos semiplanos.
Por un punto pasan infinitas rectas.
Por dos puntos pasa una sola recta.

1. **Señala en tu cuaderno tres puntos A, B, C no alineados, es decir que no estén en la misma recta.**

   ¿Cuántas rectas se pueden trazar uniéndolos de dos en dos?

2. **Señala en tu cuaderno cuatro puntos de forma que no haya tres alineados.**

   ¿Cuántas rectas resultan uniéndolos de dos en dos?

   ¿Y si fueran cinco puntos sin que haya tres de ellos alineados?

3. **Dibuja con una regla varias rectas que pasen por un punto P.**

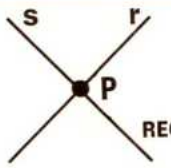
   ¿Cuántas rectas pasan por el punto **P**?

4. **Señala dos puntos A y B en un papel y con la regla traza la recta que pasa por ellos.**

   ¿Cuántas rectas puedes trazar que pasen por los puntos **A** y **B**?

2. Rectas secantes y rectas paralelas

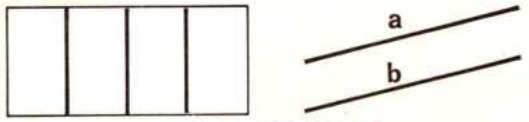
Rectas secantes.



RECTAS SECANTES

Una recta tiene infinitos puntos. Observa que la recta **r** y la recta **s** tienen común el punto **P**. Se dice que la intersección de las dos rectas es el punto **P**: $r \cap s = \{P\}$, y que las rectas **r** y **s** son **rectas secantes.**

Rectas paralelas no coincidentes.



RECTAS PARALELAS

a//b → **a** es paralela a **b**

Dobla una hoja de papel por la mitad. Sin desdoblarla, vuelve a doblarla por la mitad y sigue haciendo lo mismo varias veces. Al desdoblar quedan marcadas varias **rectas paralelas.**

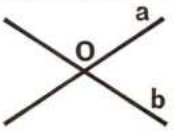
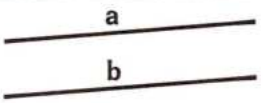
Observa que las dos rectas **a** y **b** son paralelas, pues no tienen ningún punto común. Por eso su intersección es el conjunto vacío: $a \cap b = \varnothing$. Para indicar que **a** y **b** son paralelas se escribe **a//b.**

Rectas paralelas coincidentes.

RECTAS COINCIDENTES

Las rectas **m** y **p** tienen todos los puntos comunes.

Se llaman **rectas coincidentes** y se consideran como un caso especial de rectas paralelas.

RECTAS SECANTES	RECTAS PARALELAS	
 $a \cap b = \{O\}$ **a** y **b** son rectas secantes	 $a \cap b = \varnothing$ **a** y **b** son rectas estrictamente paralelas	$a \cap b = a = b$ **a** y **b** son rectas coincidentes

Dos rectas son secantes cuando tienen un solo punto común.

Dos rectas son paralelas cuando no tienen ningún punto común o cuando coinciden.

1. **Traza dos rectas p y q tales que $p \cap q = \{H\}$.**
   ¿Cómo son las rectas **p** y **q**?

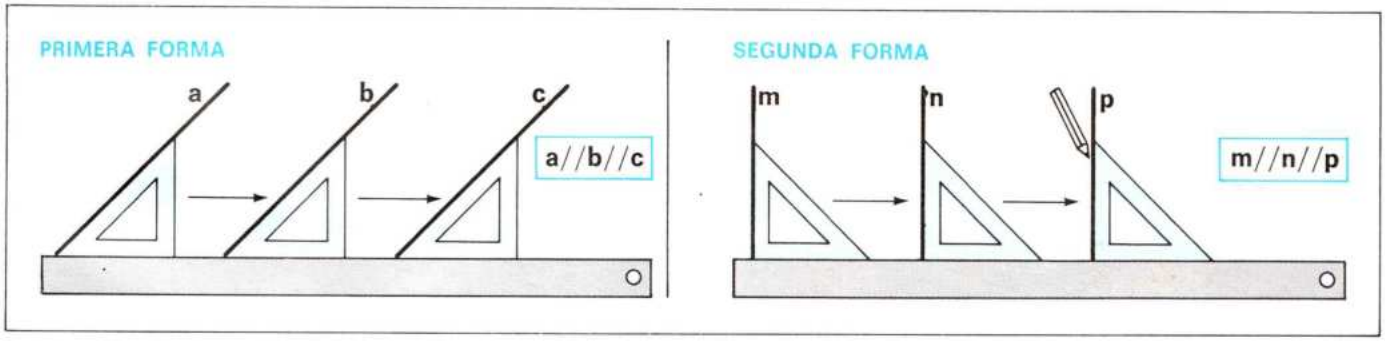
2. **Dibuja tres rectas p, q y r tales que $p \cap q = \varnothing$ y $q \cap r = \varnothing$.**
   ¿Cómo son estas rectas?

3. **Dibuja tres rectas a, b y c tales que $a \cap b = \{P\}$ y $b \cap c = \{P\}$.**
   ¿Qué puedes decir de las rectas **a, b y c**?

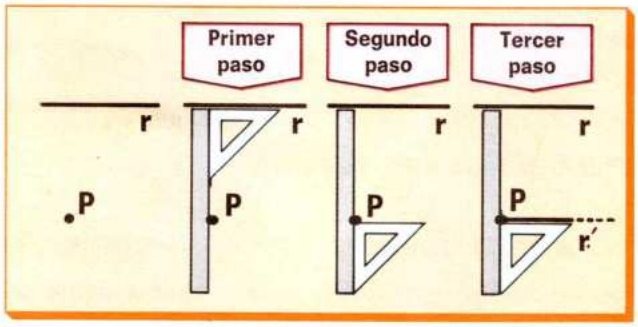
3. Trazado de rectas paralelas. Dirección y sentido

Cómo se trazan rectas paralelas.

Observa dos formas de trazar rectas paralelas con la regla y con la escuadra:



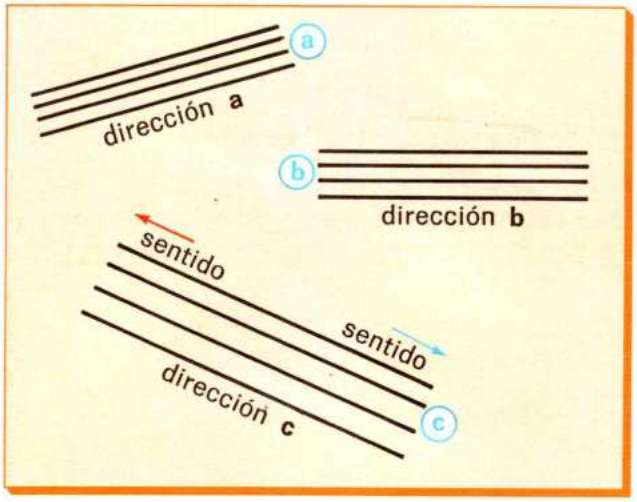
Cómo se trazan las paralelas a una recta dada que pasa por un punto dado.



Observa cómo se procede para trazar por el punto **P** la recta **r'** paralela a una recta dada **r.**

Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela a dicha recta.

Dirección y sentido.



Observa el grupo (a) de rectas paralelas.

Se dice que todas ellas tienen la misma **dirección**.

Lo mismo se dice de las rectas del grupo (b).

Una dirección está formada por una recta y todas las que son paralelas a ella.

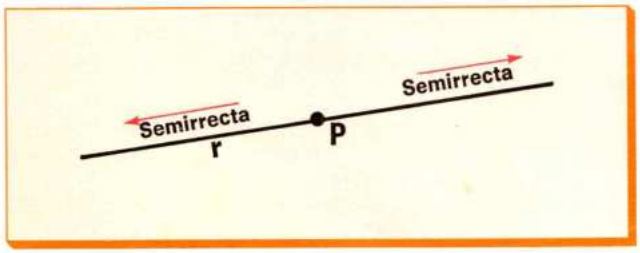
Para nombrar una dirección se nombra una cualquiera de las rectas que la forman.

Cada recta y cada dirección tienen dos sentidos.
En la dirección (c), la flecha roja señala un **sentido** y la flecha azul indica el sentido opuesto.

Una dirección es una recta y todas las rectas que son paralelas a ella.
Cada dirección tiene dos sentidos, que se llaman sentidos opuestos.

4. Semirrecta y segmentos

Semirrecta.

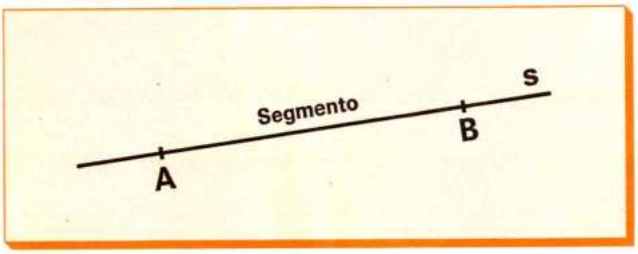


Observa que a partir del punto **P**, la recta **r** se puede recorrer en dos sentidos.

El punto **P** divide la recta en dos semirrectas opuestas.

El punto **P** es el origen de las dos semirrectas.

Segmento.



Los puntos **A** y **B** determinan una porción de la recta **s** que se llama **segmento.**

Los puntos **A** y **B** son los extremos del segmento.

Un punto divide una recta en dos semirrectas opuestas.

Un segmento $\overline{AB}$ es la porción de recta limitada por dos puntos A y B que son los extremos del segmento.

1. Las semirrectas r y s tienen el mismo origen P.

¿Cuántas semirrectas con origen en el punto **P** se pueden trazar?

2. Toma una regla y una escuadra y traza tres rectas paralelas.

3. Dibuja una recta r. Traza cuatro rectas paralelas a r.

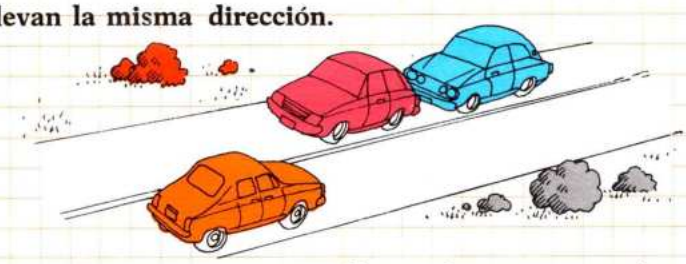
¿Puedes trazar más rectas paralelas a **r**? ¿Cuántas rectas hay paralelas a una dada?

4. El coche azul, el rojo y el amarillo llevan la misma dirección.

Compara el sentido de los coches:

a) rojo y amarillo,

b) rojo y azul.



5. Traza y resuelve:

a) Dos rectas **a** y **b** de la misma dirección. ¿Cómo se llaman las rectas **a** y **b**?

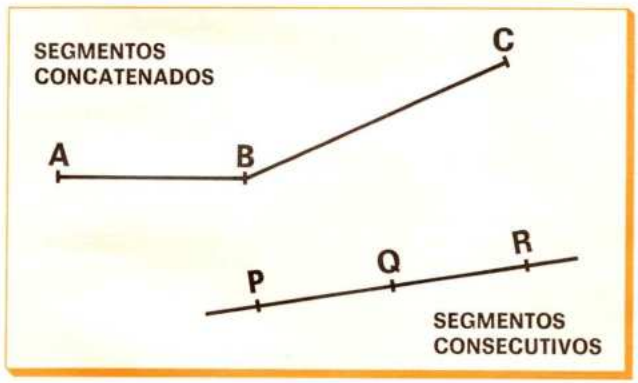
b) Dos rectas **r** y **s** de distinta dirección. ¿Cómo se llaman las rectas **r** y **s**?

c) Tres rectas **r**, **s** y **m** tales que **r** y **m** tengan la misma dirección y que **s** y **m** tengan distinta dirección.

6. Dibuja tres rectas a, b y t.

La recta **a** debe tener la misma dirección que la recta **b** y la recta **b** debe tener la misma dirección que la recta **t**, ¿tienen **a** y **t** la misma dirección?

5. Igualdad y desigualdad de segmentos



Segmentos concatenados y segmentos consecutivos.

Observa el par de segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y el par de segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$.

¿Qué tienen en común los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$?

¿Qué tienen en común los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$?

¿En qué se diferencia el par de segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del par de segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$?

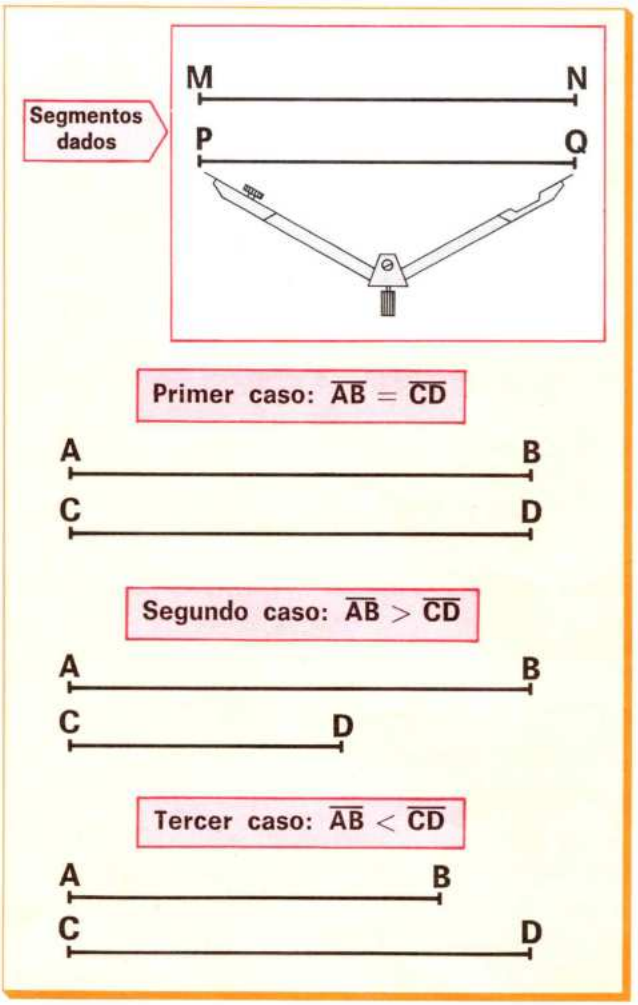
Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se llaman **segmentos concatenados.**

Los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ se llaman **segmentos consecutivos.**

Dos segmentos se llaman segmentos concatenados cuando sólo tienen en común un extremo.

Dos segmentos se llaman segmentos consecutivos cuando son concatenados y están en la misma recta.

Igualdad y desigualdad de segmentos.



Para transportar un segmento $\overline{MN}$ sobre otro $\overline{PQ}$ se utiliza un papel donde se marcan los extremos de un segmento o también se puede utilizar un compás; observa que al llevar el segmento $\overline{PQ}$ sobre el segmento $\overline{MN}$ ambos coinciden.

Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, al llevar uno sobre el otro de modo que coincidan los extremos **A** y **C** pueden ocurrir tres casos:

- Primer caso: **Cuando los extremos B y D coinciden**

  En este caso se dice que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son iguales y se escribe:

  $$\overline{AB} = \overline{CD}$$

- Segundo caso: **Cuando el punto D cae dentro del segmento $\overline{AB}$**

  En este caso se dice que el segmento $\overline{AB}$ es mayor que el segmento $\overline{CD}$ y se escribe:

  $$\overline{AB} > \overline{CD}, \text{ o bien: } \overline{CD} < \overline{AB}$$

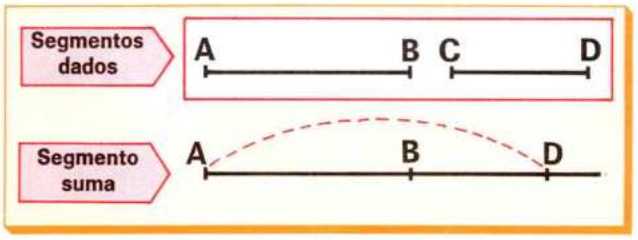
- Tercer caso: **Cuando el punto B cae dentro del segmento $\overline{CD}$**

  En este caso el segmento $\overline{CD}$ es mayor que el segmento $\overline{AB}$:

  $$\overline{CD} > \overline{AB}, \text{ o bien: } \overline{AB} < \overline{CD}$$

6. Operaciones con segmentos

Cómo se suman segmentos.



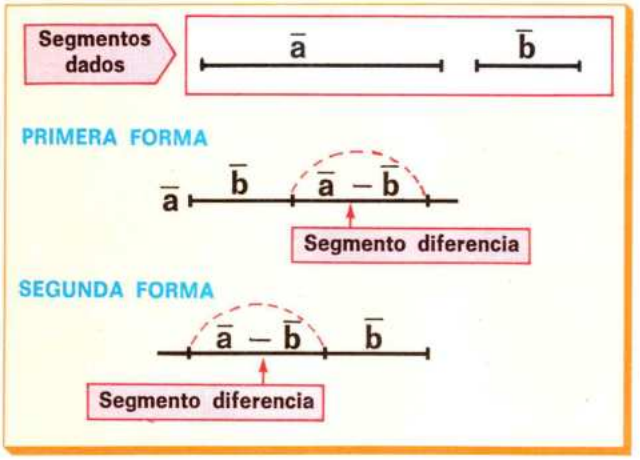
Se desea sumar los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Para ello se transportan sobre una misma recta de modo que los extremos **B** y **C** coincidan y que los segmentos queden consecutivos.

El segmento $\overline{AD}$ es la suma de los segmentos dados:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD}$$

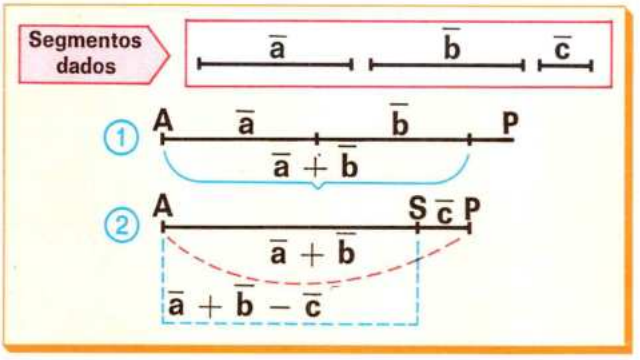
Cómo se restan segmentos.



Dados los segmentos $\bar{a}$ y $\bar{b}$, si el segmento $\bar{a}$ es mayor que el segmento $\bar{b}$ se puede hallar la diferencia $\bar{a} - \bar{b}$.

Para ello se lleva sobre el segmento mayor $\bar{a}$ el segmento $\bar{b}$ en una cualquiera de las dos formas que indica la figura.

Sumas y restas combinadas de segmentos.



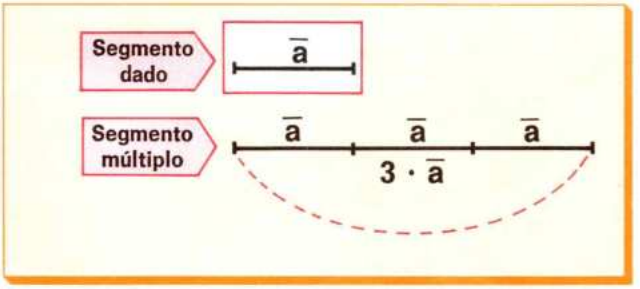
Para realizar sumas y restas combinadas de segmentos, por ejemplo, $\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$, se pueden efectuar las operaciones en el orden en que aparecen.

(1) Se halla la suma $\bar{a} + \bar{b} = \overline{AP}$.

(2) Del segmento $\overline{AP}$ se resta $\bar{c}$: $\overline{AP} - \bar{c} = \overline{AS}$.

El segmento $\overline{AS} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$ es el resultado de las dos operaciones.

Cómo se multiplica un segmento por un número entero natural.



Consideremos el segmento $\bar{a}$. El producto $3 \cdot \bar{a}$ es la suma de tres segmentos iguales al segmento $\bar{a}$. Por tanto, para hallar el segmento $3 \cdot \bar{a}$ se llevan sobre una recta tres segmentos iguales al $\bar{a}$, uno a continuación del otro.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. ¿Cuántas rectas pasan por un punto? ¿Cuántas rectas pasan por dos puntos dados?

2. ¿Qué son rectas secantes? Si las rectas **a** y **b** son secantes ¿qué puedes decir de $\mathbf{a} \cap \mathbf{b}$?

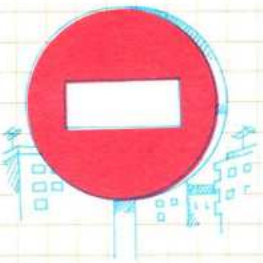
3. Si de dos rectas **r** y **s** se sabe que $\mathbf{r} \cap \mathbf{s} = \mathbf{r} \equiv \mathbf{s}$ ¿cómo son estas rectas?

4. Utilizando la regla y la escuadra, dibuja en tu cuaderno cuatro rectas paralelas.

5. ¿Qué indica esta señal de tráfico?

Señala las respuestas correctas:

- ☐ a) Dirección prohibida.
- ☐ b) Sentido prohibido.
- ☐ c) No se puede circular por esa calle.
- ☐ d) No se puede circular por esa calle en un sentido, pero sí en el sentido contrario.



6. Dibuja cinco rectas que tengan la misma dirección.

7. Traza una recta **r** y señala un punto **P** exterior a la recta.

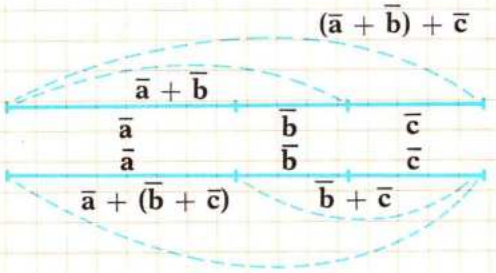
Después traza una recta **r'** paralela a **r** que pase por el punto **P**.

8. Dibuja dos segmentos concatenados y otros dos segmentos consecutivos.

9. Dados los segmentos $\overline{a}$ y $\overline{b}$ calcula $\overline{a} + \overline{b}$; $\overline{b} + \overline{a}$; $\overline{a} - \overline{b}$.

Comprueba que la suma de segmentos es conmutativa, es decir, que los segmentos $\overline{a} + \overline{b}$ y $\overline{b} + \overline{a}$ son iguales.

10. Comprueba con tres segmentos, $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$, la propiedad asociativa de la suma de segmentos, es decir, que el segmento $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$ y el segmento $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ son iguales.



11. Considera los segmentos $\overline{m}$ y $\overline{p}$

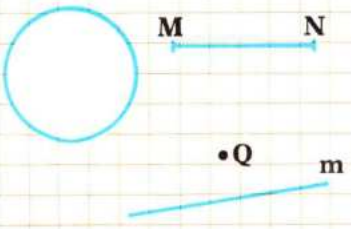
Halla y contesta:

a) $\overline{m} + 2 \cdot \overline{p}$ c) $2 \cdot \overline{m}$ e) $4 \cdot \overline{p}$

b) $2 \cdot \overline{m} - 3 \cdot \overline{p}$ d) $3 \cdot \overline{p}$ f) ¿Se puede calcular $\overline{p} - \overline{m}$?

12. Contesta:

- ¿Son secantes el segmento $\overline{MN}$ y el círculo?
- ¿Son secantes la recta **MN** y el círculo?
- ¿Cuántas rectas secantes se pueden trazar por el punto **Q**?
- ¿Cuántas rectas paralelas a **m** se pueden trazar que pasen por **Q**?



CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

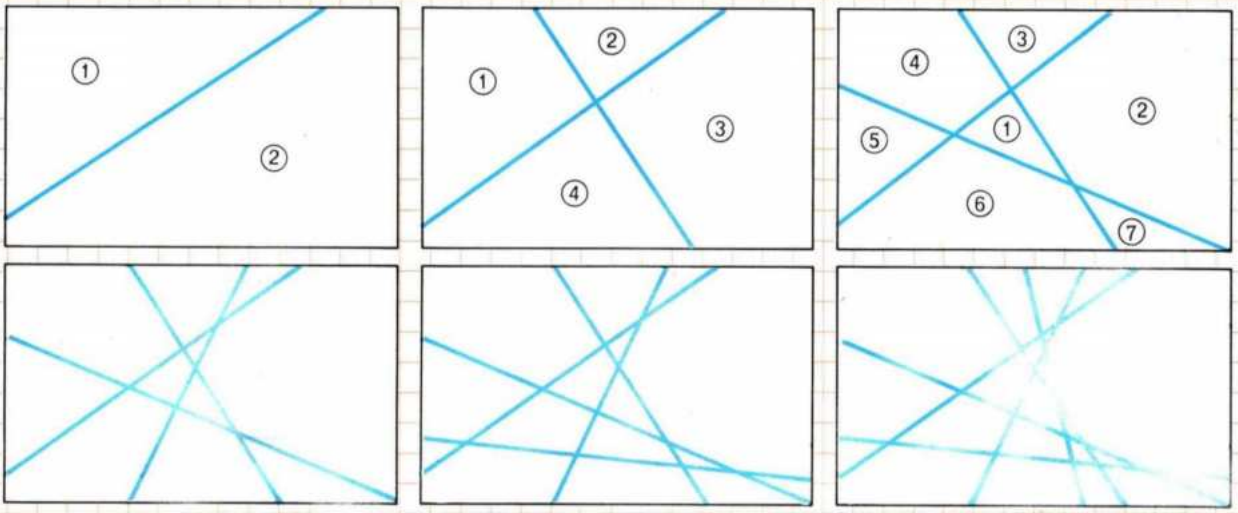
Una persona necesita sacar de un depósito 7 litros de líquido. La persona sólo dispone de dos vasijas, una de 9 litros y otra de 4 litros, y no puede utilizar otras vasijas auxiliares para echar el líquido. ¿Qué puede hacer para sacar los 7 litros que necesita?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Un jardín rectangular queda dividido por un camino en dos partes o regiones. Si son dos los caminos que se cortan, el jardín queda dividido en cuatro regiones.

¿Y si hay cuatro caminos que se cortan? ¿Y si son cinco los caminos que se cortan? ¿Y si son seis?

Numera las regiones y cuéntalas.



Completa la tabla:

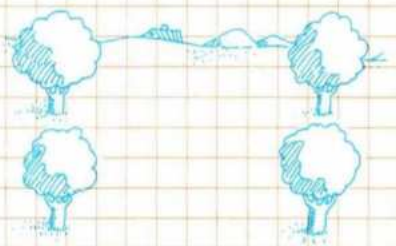
Número de caminos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Número de regiones	1	2					

Con la siguiente fórmula puedes encontrar también el número de regiones:

$$\text{Número de regiones} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} + 1)$$

Comprueba con esta fórmula los resultados anteriores y calcula el número de regiones cuando son 7 los caminos que se cortan.

2. Un señor tiene en su parcela cuatro árboles como los de la figura y desea unir con cuerdas tres de estos árboles para formar después un jardín triangular con césped.

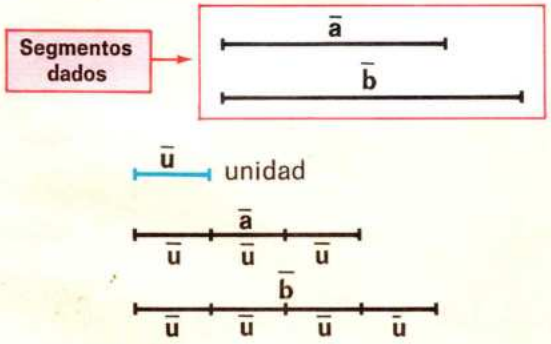


¿De cuántas formas puede hacerlo?
Haz una figura para cada una de ellas.

TEMA 16 MEDIDAS DE LONGITUD. UNIDADES

1. Medida de segmentos

Cuando la medida es un número natural.



Vamos a medir los segmentos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ tomando como unidad el segmento $\bar{u}$. Para ello se lleva el segmento $\bar{u}$ sobre los segmentos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ tantas veces como se pueda.

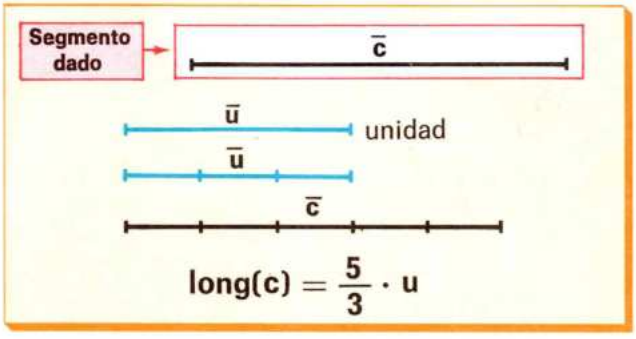
Se observa que el segmento $\bar{u}$ está contenido tres veces en el segmento $\bar{a}$ y cuatro veces en el segmento $\bar{b}$:

- La medida del segmento $\bar{a}$ con la unidad $\bar{u}$ es 3.
- La medida del segmento $\bar{b}$ con la unidad $\bar{u}$ es 4.

También se dice:

- La longitud del segmento $\bar{a}$ es $3 \cdot \bar{u} \rightarrow \text{long}(\bar{a}) = 3 \cdot \bar{u}$.
- La longitud del segmento $\bar{b}$ es $4 \cdot \bar{u} \rightarrow \text{long}(\bar{b}) = 4 \cdot \bar{u}$.

Cuando la medida es una fracción ordinaria.

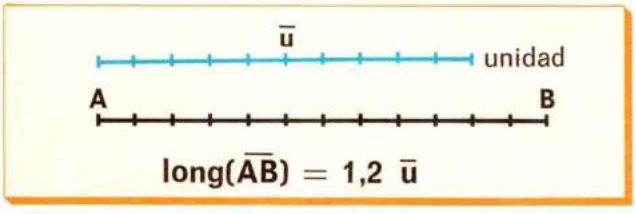


Al tratar de medir el segmento $\bar{c}$ tomando como unidad el segmento $\bar{u}$ se observa que el segmento $\bar{c}$ no es múltiplo del segmento $\bar{u}$, pero contiene exactamente un cierto número de partes iguales de $\bar{u}$. Exactamente contiene cinco terceras partes de $\bar{u}$. Es decir:

$$\text{long}(\bar{c}) = \frac{5}{3} \cdot \bar{u}$$

La medida del segmento $\bar{c}$ con la unidad $\bar{u}$ es $\frac{5}{3}$

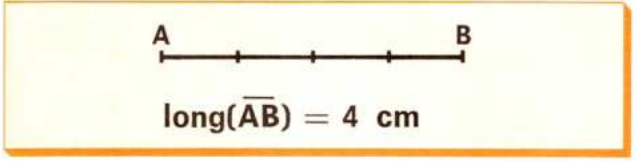
Cuando la medida es un decimal exacto.



Cuando la unidad de medida está dividida en 10, 100, ... partes iguales, la medida de un segmento se puede expresar en forma decimal.

Observa que la unidad de medida $\bar{u}$ está ahora dividida en 10 partes iguales y que tomando como unidad $\bar{u}$ la medida del segmento $\overline{AB}$ es 1,2.

Distancia entre dos puntos.



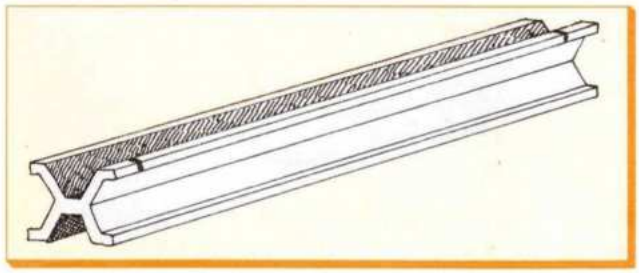
Observa el segmento $\overline{AB}$. La longitud del segmento $\overline{AB}$ se llama **distancia** entre los puntos **A** y **B**. Escribiremos:

$$\text{long}(\overline{AB}) = \mathbf{d(A, B)}$$

Medir un segmento es compararlo con otro segmento que se toma como unidad o con los múltiplos y submúltiplos del segmento unidad.

La distancia entre dos puntos A y B es la longitud del segmento $\overline{AB}$.

2. Unidades de longitud



El metro y sus unidades derivadas.

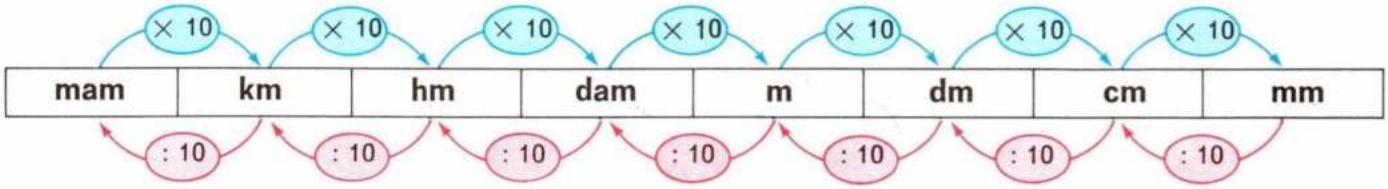
La unidad principal de longitud es el metro.

El metro es **la distancia que existe entre dos trazos grabados en una barra de platino e iridio que está a la temperatura de cero grados centígrados y se encuentra en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de París.**

Del metro se derivan otras unidades mayores, que son los **múltiplos**, y otras menores, que son los **submúltiplos**.

MÚLTIPLOS DEL METRO				UNIDAD PRINCIPAL	SUBMÚLTIPLOS DEL METRO		
mam	**km**	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**
miriámetro	kilómetro	hectómetro	decámetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro

El esquema siguiente resalta la relación decimal que hay entre estas unidades:



Cada unidad de longitud es diez veces mayor que la inmediata inferior y diez veces menor que la inmediata superior.

1. Indica la unidad que representa la cifra 4 en cada una de las siguientes cantidades:

a) 463 m b) 148 dm c) 347 km d) 1,54 m e) 406 mm

2. Reduce a metros:

a) 0,7 hm c) 2.700 mm e) 76 dm g) 7,3 hm
b) 0,84 km d) 475 dm f) 0,5 dm h) 4,5 cm

3. Reduce en cada caso primero a decámetros y después a decímetros:

a) 0,7 km c) 7.300 cm e) 8.400 mm g) 75 hm i) 9,6 cm
b) 0,84 dm d) 4,5 m f) 8,7 mam h) 6,4 dam j) 560.000 mm

4. Resuelve:

Una película consta de 80.000 imágenes y cada imagen tiene 25 milímetros de largo.

¿Cuál es la longitud en kilómetros de la película?

5. Calcula:

Una persona avanza en cada paso 0,60 m y otra 0,75 m.

¿Qué distancia las separa después de dar cada una 200 pasos si salieron del mismo punto:

a) en el mismo sentido;

b) en sentido contrario?

3. Otras unidades de longitud

Unidades para medir distancias muy pequeñas.

1 μ = 1 micra
1 mμ = 1 milimicra

1 micra = 1 milésima de milímetro

1 μ = 0,001 mm

1 milimicra = 1 milésima de micra

1 mμ = 0,001 μ

En la mecánica de precisión y en Biología se necesitan otras unidades menores que el milímetro; entre ellas se encuentran la **micra** y la **milimicra.**

- La micra es la milésima parte de 1 milímetro. Una micra se escribe 1 μ (μ es la letra griega que se pronuncia **mi**).
- La milimicra es la milésima parte de la micra. Una milimicra se escribe 1 mμ.

Unidades para medir grandes distancias.

1 U.A. = 150₁000.000 km

1 año luz = 9₂360.800₁000.000 km

Para medir grandes distancias se utilizan unidades mayores que el miriámetro.

Entre las unidades mayores que el miriámetro están la **unidad astronómica** y el **año luz.**

- La **unidad astronómica** es la distancia media de la Tierra al Sol.

  1 unidad astronómica se escribe: **1 U.A.**
- El **año luz** es la distancia que recorre en línea recta la luz en un año. En cada segundo la luz recorre 300.000 km.

La micra es la milésima parte del milímetro.
La milimicra es la milésima parte de la micra.
La unidad astronómica es la distancia media de la Tierra al Sol.
El año luz es la distancia en línea recta que recorre la luz en un año.

1. Completa:

0,001 mm = 1 μ	0,01 mm = 10 μ	1 μ = 0,001 mm
0,002 mm = 2 μ	0,02 mm = ... μ	7 μ = ... mm

2. ¿Cuántas micras tiene 1 mm?

3. Reduce a micras:

a) 3 mm b) 4 mm c) 0,5 mm d) 1 m e) 1 km

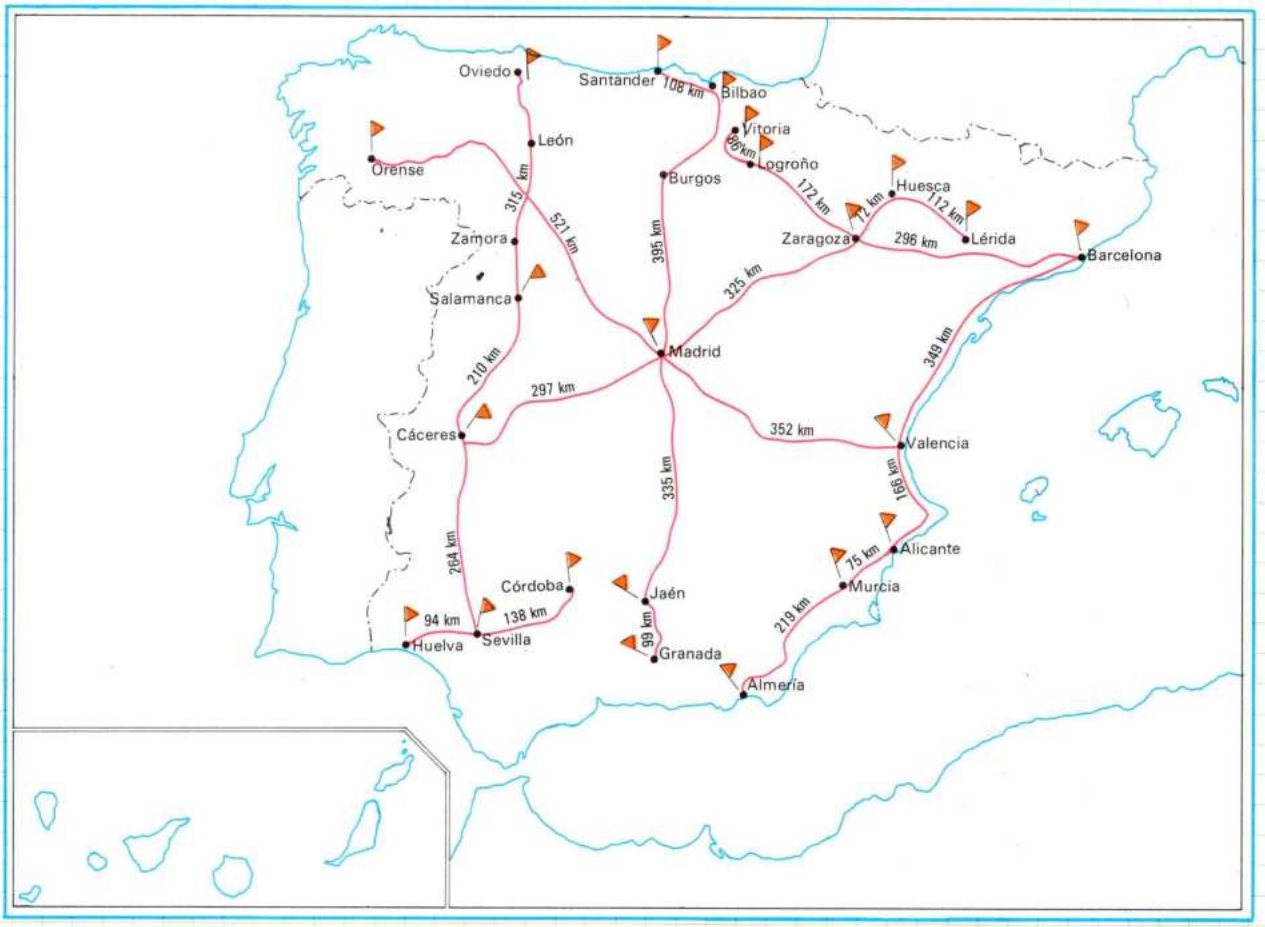
4. Resuelve:

A. Un glóbulo rojo de la sangré tiene un diámetro de 6 μ.
Expresa este diámetro en milímetros y en centímetros.

B. Sabiendo que la distancia media de Plutón al Sol es de 39,46 U.A.
¿cuál es la distancia media de Plutón al Sol en kilómetros?

Actividades

1. Observa el mapa:



- ¿Cuál es la longitud del recorrido Madrid-Santander pasando por Bilbao?
- ¿Cuál es la longitud del recorrido total Madrid-Zaragoza-Huesca-Lérida?
- Calcula las longitudes de cada uno de los siguientes recorridos:
  - — Recorrido a): Valencia-Alicante-Murcia-Almería.
  - — Recorrido b): Barcelona-Zaragoza-Logroño-Vitoria.
  - — Recorrido c): Madrid-Cáceres-Sevilla-Huelva.
  - — Recorrido d): Granada-Jaén-Madrid-Orense.

2. El radio de la Tierra es de 6.366;000.000 de mm, y el espesor de la retina del ojo es 0,00005 dam.
   ¿Están expresadas las anteriores medidas en unidades adecuadas?
   Expresa la primera en kilómetros y la segunda en milímetros y en micras.

3. ¿Cuántos miles de kilómetros tiene 1 U.A.? ¿Y 5 U.A.? ¿Y 28 U.A.?

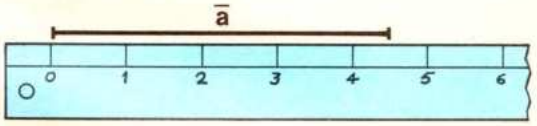
4. Averigua los segundos que tiene un día. Después averigua los kilómetros que tienen 3 años luz.

5. La distancia de una estrella a la Tierra es de 4 años luz. Expresa esta distancia en kilómetros.

4. Aproximación de medidas

APROXIMACIÓN EN CENTÍMETROS

Segmento dado → $\bar{a}$



$long(\bar{a}) > 4$ cm

$long(\bar{a}) < 5$ cm

Sucesivas aproximaciones de la medición de un segmento.

Con frecuencia no es posible dar la medida exacta de un segmento con una unidad dada. En estos casos se da una medida aproximada.

Observa el segmento $\bar{a}$ y la regla graduada en centímetros.

El segmento $\bar{a}$ mide entre 4 cm y 5 cm. Se escribe:

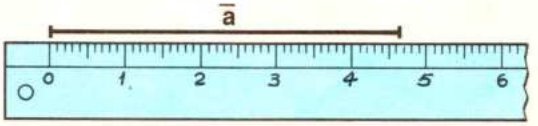
$$4 \text{ cm} < \text{medida de } \bar{a} < 5 \text{ cm}$$

La medida del segmento $\bar{a}$ está limitada por los números 4 y 5. También se dice que

$$4 \text{ cm} < \text{medida de } \bar{a} < 5 \text{ cm}$$

es una primera **limitación** de la medida del segmento $\bar{a}$. Cualquier número comprendido entre 4 cm y 5 cm, por ejemplo 4,5 cm, es una medida aproximada del segmento $\bar{a}$.

APROXIMACIÓN EN MILÍMETROS



$long(\bar{a}) > 46$ mm

$long(\bar{a}) < 47$ mm

Observa ahora la medida del segmento $\bar{a}$ con una regla graduada en centímetros y en milímetros.

El segmento $\bar{a}$ mide entre 4,6 cm y 4,7 cm:

$$4{,}6 \text{ cm} < \text{medida de } \bar{a} < 4{,}7 \text{ cm}$$

Cualquier número comprendido entre 4,6 cm y 4,7 cm, por ejemplo 4,65 cm, es un valor aproximado de la medida del segmento $\bar{a}$.

En la práctica de la vida diaria se manejan más las medidas aproximadas que las medidas exactas.

Lo que hemos hecho se puede resumir en el siguiente cuadro:

Mediciones	Limitaciones	Aproximaciones de la medida del segmento $\bar{a}$
Primera medición	Primera limitación: 4 cm < medida de $\bar{a}$ < 5 cm	Aproximación por defecto → 4 cm Aproximación por exceso → 5 cm Aproximación intermedia → 4,5 cm 4 4,5 5
Segunda medición	Segunda limitación: 4,6 cm < medida de $\bar{a}$ < 4,7 cm	Aproximación por defecto → 4,6 cm Aproximación por exceso → 4,7 cm Aproximación intermedia → 4,65 cm 4,65 4,6 4,7

1. Observa el segmento $\overline{AB}$.

Haz dos mediciones, la primera utilizando sólo centímetros y la segunda utilizando también milímetros. En cada caso, escribe las aproximaciones por defecto, por exceso y la intermedia.

2. Lee y escribe:

Haz dos mediciones del borde de tu mesa: la primera, en centímetros, y la segunda, en milímetros. Escribe en cada caso las aproximaciones por defecto y por exceso y la aproximación intermedia.

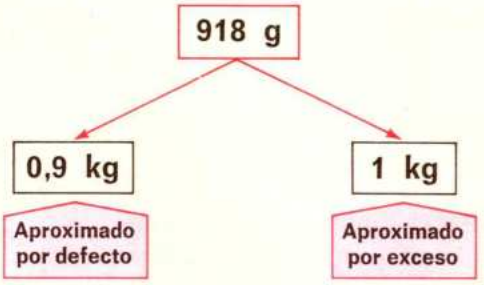
5. Orden de magnitud de un resultado

CÁLCULOS DE EVA

$$918 \times 40 = 36.720 \text{ g}$$

Masa del aceite en g → 36.720

Masa del aceite en kg → 3,672



$$36 \text{ kg} < \text{resultado} < 40 \text{ kg}$$

Cómo evitar algunos errores en el cálculo aproximado.

Veamos en el siguiente problema cómo el cálculo aproximado permite evitar algunos errores.

La masa de un litro de aceite es 918 g ó 0,918 kg.

¿Cuál es la masa en kilogramos de 40 litros de aceite?

Observa cómo hizo el problema Eva.

Veamos cómo con el cálculo aproximado se puede ver que Eva se ha confundido.

- La aproximación por defecto de 0,918 kg es 0,9 kg.
- La aproximación por exceso de 0,918 kg es 1 kg.

Por tanto:

$$40 \times 0{,}9 \text{ kg} = 36 \text{ kg}$$
$$40 \times 1 \text{ kg} = 40 \text{ kg}$$

El resultado debe estar entre 36 y 40:

$$36 \text{ kg} < \text{resultado} < 40 \text{ kg}.$$

- La aproximación por defecto es 36 kg.
- La aproximación por exceso es 40 kg.
- La aproximación intermedia es 38 kg.

Estas tres aproximaciones nos indican el **orden de magnitud** que tiene el resultado.

El resultado que ha obtenido Eva (3,672 kg) se aparta mucho del orden de magnitud, y por tanto está claro que el resultado obtenido por Eva es incorrecto.

La masa de los 40 litros de aceite es 36,72 kg.

Los cálculos anteriores se hacen, en general, mentalmente antes de resolver el problema.

Con un cálculo mental fácil es muchas veces posible encontrar el orden de magnitud del resultado que se busca en un problema y es posible evitar errores de cálculo.

1. Resuelve:

A. Un ciclista ha recorrido dos veces la distancia que hay entre dos ciudades A y B, que es de 7.669 metros. ¿Qué distancia ha recorrido?

a) Calcula mentalmente 7.000×2 y 8.000×2.

b) Calcula la aproximación por exceso y la aproximación por defecto:
$14.000 < 7.669 \times 2 < 16.000$

El orden de magnitud del resultado es 15.000. ¿Cuál es el resultado exacto?

B. Laura ha comprado un ovillo de lana azul de 783 cm y otro de lana roja de 615 cm para confeccionar un jersey. Laura calculó que tenía un total de 1.598 cm de lana.

Sin calcular la suma $783 + 615$, muestra, mediante cálculo aproximado, que Laura se ha equivocado.

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Reduce a metros:

① 5 km y 6 hm ② 8,5 km ③ 6 hm y 8 dam ④ 4.300 dm

2. Reduce a litros:

① 6,5 kl ② 8 hl y 6 dal ③ 300 dl ④ 500 cl

3. Reduce a kilogramos:

① 6 t ② 7 q ③ 8 t y 5 q ④ 60 hg ⑤ 4.000 g

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Las unidades de capacidad son, de mayor a menor, mirialitro (mal), kilolitro (kl), hectolitro (hl), decalitro (dal), litro (l), decilitro (dl), centilitro (cl) y mililitro (ml).

Haz un esquema referido a las medidas de capacidad como el que hay en la página 129.

2. Otras unidades de masa son la tonelada (t), que tiene 1.000 kg, y el quintal (q), que tiene 100 kg. ¿Cuántos quintales son 24 toneladas?

3. Las siguientes medidas vienen expresadas por números que tienen muchos ceros.

Esto significa que en cada caso la unidad elegida no es la unidad adecuada.

Expresa estas medidas utilizando en cada caso la unidad adecuada:

	Medidas utilizando unidades inadecuadas	Medidas utilizando unidades adecuadas
Capacidad de un tonel	700.000 ml	700 litros
Masa de un barco	130,000.000 de gramos	... toneladas
Longitud de un río	95,000.000 de cm	... kilómetros
Magnitud de un alfiler	0,00004 km	... cm
Altura de un alumno	0,00132 km	... m

4. Cambia de unidad para obtener un número más fácil de leer y de escribir:

a) 7.800 cl = 78 l c) 590.000 kg e) 0,0006 mam g) 26,000.000 de mm

b) 0,0006 kl d) 0,0007 kl f) 0,000016 km h) 64.000 m

5. El diámetro del Sol en unidades astronómicas (U.A.) es 0,0093, y los diámetros de la Tierra y de la Luna son 0,000085 U.A. y 0,000023 U.A.

Expresa estas medidas en kilómetros.

6. Un glóbulo rojo de la sangre humana mide 6 μ.

¿Qué longitud ocupan 50,000.000 de glóbulos rojos colocados en fila?

7. La luz recorre en 1 segundo 300.000 km. Si la luz del Sol tarda en llegar a la Tierra 8 minutos ¿cuál es la distancia del Sol a la Tierra?

CÁLCULO APROXIMADO

1. Sin hacer las sumas, calcula el valor aproximado por defecto y el valor aproximado por exceso mediante dos múltiplos de 100:

a) $347 + 684 \longrightarrow \underbrace{300 + 600}_{900} < (347 + 684) < \underbrace{400 + 700}_{1.100}$

b) $906 + 1.584$ c) $648 + 3.024$ d) $428 + 106$ e) $534 + 827$

2. Sin calcular, haz las sumas limitadas mediante dos múltiplos de 1.000:

a) $6.684 + 2.485 \longrightarrow \underbrace{6.000 + 2.000}_{8.000} < (6.684 + 2.485) < \underbrace{7.000 + 3.000}_{10.000}$

b) $3.746 + 8.702$ c) $8.942 + 9.754$ d) $14.264 + 8.725$

3. Sin hacer las siguientes sumas y mediante cálculo mental aproximado, averigua las sumas que con seguridad están mal hechas:

a) $13.643 + 7.251 = 19.264$ c) $4.125 + 2.874 = 8.499$

b) $8.200 + 3.100 = 11.300$ d) $504 + 496 = 2.000$

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Las calles de una urbanización tienen una longitud de 117,5 km. Por asfaltarlos se han pagado 4.600 ptas. por cada metro.

¿Cuánto ha costado asfaltar la urbanización?

2. Un camión se carga con 340 cajas de 30 kg cada una. La tara del camión es 3.500 kg.

¿Cuánto pesa el camión cargado?

3. Observa las masas utilizadas en una farmacia para hacer pesadas de precisión.

Las masas (pesas) son tan pequeñas que se usan con pinzas.

¿Qué pesas elegirás para obtener una masa de 88 mg? ¿Y una masa de 15 mg? ¿Y una masa de 0,01 g?

5 dg	2 dg	1 dg
5 cg	2 cg	1 cg
5 mg	2 mg	1 mg

4. Un camionero transporta 9 lavadoras de 315 kg de peso cada una.

Calcula la carga y encuentra que es de 2.635 kg. Sin efectuar el cálculo ¿cómo puedes saber que se ha equivocado?

5. Luis dice que el valor de 8 libros a 195 ptas. es 1.660 ptas.

¿Qué multiplicación aproximada por exceso, realizada mentalmente, había que hacer para comprobar que Luis se ha equivocado?

TEMA 17 OPERACIONES CON MEDIDAS DE LONGITUD

1. Complejos e incomplejos de longitud

Números complejos y números incomplejos.

LAURA

1,56 m ← Forma incompleja

1 m 56 cm
1 m 5 dm 6 cm ← Forma compleja

Laura mide 1,56 m de altura. La altura de Laura se puede expresar de dos formas:

a) En **una sola unidad:** 1,56 m o bien 156 cm.

b) En **varias unidades:** 1 m 56 cm o bien 1 m 5 dm 6 cm.

En el caso a) la altura de Laura está expresada en forma incompleja, y en el caso b), en forma compleja.

Una cantidad se dice que está escrita en forma incompleja o que es un número incomplejo cuando se expresa en una sola unidad, y se dice que está escrita en forma compleja o que es un número complejo cuando se expresa en distintas unidades.

Paso de complejo a incomplejo.

¿Cuántos metros son 0,52 km 0,7 hm y 8 m?

Se trata de reducir el número complejo 0,52 km 0,6 hm y 8 m a número incomplejo de metros.

Observa dos formas de hacerlo:

Reduciendo a metros

Se reducen a metros las cantidades y después se suman:

0,52 km = 0,52 × 1.000 m = 520 m

0,6 hm = 0,6 × 100 m = 60 m

8 m = 8 m

588 m

Con el cuadro de unidades

- Se escriben las diferentes unidades en el cuadro de unidades.
- Se suman los números que están en la misma columna:

	km	hm	dam	m
	0	5	2	
		0	6	
				8
Suma		**5**	**8**	**8**

0,52 km 0,6 hm 8 m = 588 m

Paso de incomplejo a complejo.

La distancia entre dos ciudades es 28,34 km.

¿Cómo se expresa esta distancia en forma compleja?

Cuando, como en este caso, se trata de unidades del Sistema Métrico Decimal, basta colocar el número en el cuadro de unidades.

CUADRO DE UNIDADES

mam	km	hm	dam	m
2	8	3	4	

Así resulta:

28,34 km = 2 mam 8 km 3 hm 4 dam

Actividades

1. Expresa en metros cada uno de los siguientes complejos:

a) 0,63 km 8 hm 6 m b) 6 hm 9 dam 3 m c) 5 dam 6 m 8 dm

2. Una viga mide 0,6 dam 0,3 cm y 0,8 dm. Expresa la longitud de la viga:

a) en incomplejo de metros,

b) en incomplejo de decímetros,

c) en incomplejo de centímetros.

3. Un ciclista ha recorrido 25,6 km 3,2 hm y 20 m. ¿Cuántos metros ha recorrido el ciclista?

4. Expresa en forma compleja cada uno de los siguientes incomplejos de longitud:

a) 7.328 m c) 3.642 cm e) 79,25 dam g) 75,26 dm

b) 75,283 hm d) 54,8 m f) 675,94 m h) 0,27 hm

5. Resuelve los siguientes problemas:

a) El radio de la Tierra mide 6.366 m. Expresa esta cantidad en forma compleja.

b) Un alambre tiene una longitud de 842 m. Expresa esta longitud en forma compleja.

c) Un coche recorre 10,5 hm en cada minuto. ¿Cuántos kilómetros recorre un coche cada hora? ¿Y en 4 horas? Expresa esta última distancia en forma compleja.

6. ¿Cómo se expresa en forma compleja una medida expresada en unidades micrométricas?

EJEMPLO RESUELTO

Una célula mide 3.428 milimicras (mμ). Expresa esta longitud en forma compleja de micras (μ) y milimicras.

$$3.428 \text{ milimicras} \xrightarrow{:\,1.000} 3{,}428 \text{ micras} =$$
$$= 3 \text{ micras} + 0{,}428 \text{ micras} = 3 \text{ micras} + 428 \text{ milimicras}$$

3.428 mμ = 3μ y 428 mμ

Ahora expresa en micras y milimicras:

a) 4.634 milimicras b) 7.328 milimicras c) 8.723 milimicras

7. ¿Cuántas milimicras son 2 μ y 65 mμ?

8. Expresa 5.638 micras en forma compleja de milímetros y micras.

9. Expresa las siguientes longitudes en micras mediante una potencia de 10:

a) 1 mm = 10^3 μ b) 1 cm c) 1 dm d) 1 m e) 2 m

10. Expresa las siguientes longitudes en metros mediante una potencia de 10:

a) 5 mam = $5 \cdot 10.000 = 5 \cdot 10^4$ b) 6 km c) 8 hm d) 7 dam

11. Expresa las siguientes masas en gramos mediante potencias de 10:

a) 7 t = 7.000 kg = 7.000.000 de g = $7 \cdot 10^6$ g

b) 8 q c) 6 kg d) 7 hg

2. Suma y resta de medidas de longitud

Suma de medidas de longitud.

Un montañero realizó un día dos salidas a la montaña.
En la primera salida anduvo → 8 km 6 hm 5 dam.
En la segunda salida anduvo → 6 km 9 hm 4 dam.

¿Cuál es la longitud del camino que ha recorrido en las dos salidas?

Hay que sumar las longitudes de los dos caminos.

Observa dos formas de hacer esta suma:

Suma en forma compleja

- Se suman los complejos sumando las unidades del mismo orden.
- Se hacen las reducciones oportunas.

	8 km	6 hm	5 dam
+	6 km	9 hm	4 dam
	14 km	15 hm	9 dam
	1		
	15 km	**5 hm**	**9 dam**

Suma en forma incompleja

- Se reducen a una sola unidad cada uno de los sumandos.
- Después se suman.

8 km 6 hm 5 dam = 8.650 m
6 km 9 hm 4 dam = 6.940 m

	8650 m
+	6940 m
	15590 m

La longitud del camino recorrido es 15 km 5 hm 9 dam = 15.590 m.

Resta de medidas de longitud.

6 km 3 hm 8 dam → 6380 m
3 km 7 hm 2 dam → − 3720 m

La carretera que separa dos pueblos mide 6 km 3 hm 8 dam. De ellos hay 3 km 7 hm 2 dam que están asfaltados y el resto está empedrado.

¿Cuánto mide la parte de carretera que no está asfaltada?

Observa dos formas de hacer esta resta:

Resta en forma compleja

- Se restan los dos complejos restando las unidades del mismo orden.
- Cuando una resta no es posible se hacen las reducciones oportunas.

	6 km	3 hm	8 dam
−	3 km	7 hm	2 dam

→

	5 km	13 hm	8 dam
−	3 km	7 hm	2 dam
	2 km	**6 hm**	**6 dam**

Resta en forma incompleja

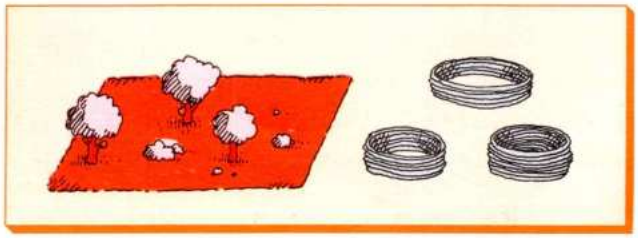
- Se reducen a una sola unidad el minuendo y el sustraendo.
- Se resta en la forma habitual.

	6380 m
−	3720 m
	2660 m

La parte no asfaltada mide 2 km 6 hm 6 dam = 2.660 m.

3. Multiplicación y división de medidas de longitud por un número natural

Multiplicación de una medida de longitud por un número natural.



Para cercar un terreno se necesitan tres alambres. Si cada alambre debe medir 4 hm 6 dam 2 m

¿cuánto mide el alambre que necesitamos?

Hay que multiplicar 4 hm 6 dam 2 m por 3.

Observa dos formas de hacer esta multiplicación:

Multiplicación en forma compleja

- Se multiplica el número natural por las distintas unidades del número complejo.
- Se hacen las reducciones oportunas.

```
  4 hm    6 dam   2 m
                  × 3
 ------------------------
 12 hm   18 dam   6 m
  1
 ------------------------
 13 hm    8 dam   6 m
```

Multiplicación en forma incompleja

- Se reduce el complejo a incomplejo.
  4 hm 6 dam 2 m = 462 m
- Se multiplica en la forma habitual.

```
  462 m
  × 3
 -------
 1386 m
```

Se necesitan 13 hm 8 dam 6 m = 1.386 m de alambre.

División de una medida de longitud por un número natural.

Una cinta que mide 4 m 6 dm y 8 cm se quiere dividir en 3 partes iguales.

¿Cuánto mide cada trozo?

Hay que dividir 4 m 6 dm y 8 m entre 3.

Observa dos formas de hacer esta división:

División en forma compleja

- Se divide por 3 cada una de las cantidades que forman el complejo.
- Cada resto se reduce a la unidad inferior siguiente.

```
  4 m    6 dm    8 cm | 3
 - 3                  ----------------
 -----                 1 m  5 dm  6 cm
  1 m = 10 dm
        -----
         16 dm
       - 15
        -----
          1 dm = 10 cm
                 -----
                  18 cm
                - 18 cm
                 -----
                   0
```

División en forma incompleja

- Se reduce el complejo a incomplejo.
  4 m 6 dm 8 cm = 468 cm
- Se hace la división en la forma habitual.

```
468 cm | 3
16       ----------
 18      156 cm.
  0
```

Cada trozo mide 1 m 5 dm 6 cm = 156 cm.

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Reduce a centímetros:

① 2 m y 3 dm ② 5 m y 8 m ③ 7 m y 8 dm ④ 8 dm y 4 cm

2. Reduce a metros:

① 3 km y 8 m ② 3 km y 6 hm ③ 4 km y 4 hm ④ 5 km 7 hm y 8 m

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Expresa en incomplejo de metros:

a) 0,6 km 3 dam b) 0,5 dam 84 dm c) 3,6 hm 8 dam

2. Expresa en forma compleja:

a) 0,54 km b) 8,5 hl c) 0,64 dal d) 8,5 m

3. Expresa en micras las longitudes siguientes:

a) 3,12 mm b) 0,0546 cm c) 0,0013 dm d) 0,032 mm

4. Haz las siguientes operaciones:

a) 3 hm 5 dam 8 m + 1 hm 7 dam 5 m

b) 12 m − 3 m 7 dm 8 cm

c) 14 m 6 dm 7 cm − 5 m 3 dm 8 cm

d) 3 m 8 dm 6 cm × 5

e) 6 m 8 dm 5 cm | 5

f) 9 m 6 dm 3 cm | 3

5. Un niño pesó al nacer 3 kg 800 g y al año pesó 13 kg 600 g. ¿Cuánto ha aumentado de peso?

6. Para subir a un piso Juan cuenta 63 escalones. Si cada escalón mide 18,5 cm ¿a qué altura está el piso de Juan?

7. Antonio avanza en cada paso 60 cm y su padre avanza 75 cm. Los dos han andado una distancia de 1.200 metros.

¿Cuántos pasos ha dado Antonio? ¿Y su padre?

8. La distancia entre dos ciudades es de 22,80 km. La carretera que las une tiene árboles a ambos lados con una separación de 15 m. Los árboles empiezan a los 300 m de la salida de cada ciudad. ¿Cuántos árboles hay entre ambas ciudades?

9. Una cinta se ha cortado en 4 partes iguales. Si cada parte mide 6 m 3 dm 8 cm ¿qué longitud tenía la cinta?

10. La distancia de un pueblo A a otro B es 4 km y 6 hm. Una persona que va de A hacia B lleva recorridos 2 km y 6 dam.

¿Qué distancia le falta para llegar a B?

11. Un ciclista ha recorrido 18 km 4 hm y 8 dam en 1 hora.

¿Cuánto recorre el ciclista en un cuarto de hora?

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

1. ¿Cuál es el número más pequeño que se puede escribir con dos cifras significativas iguales?

2. Escribe el número 30 empleando tres cifras iguales.

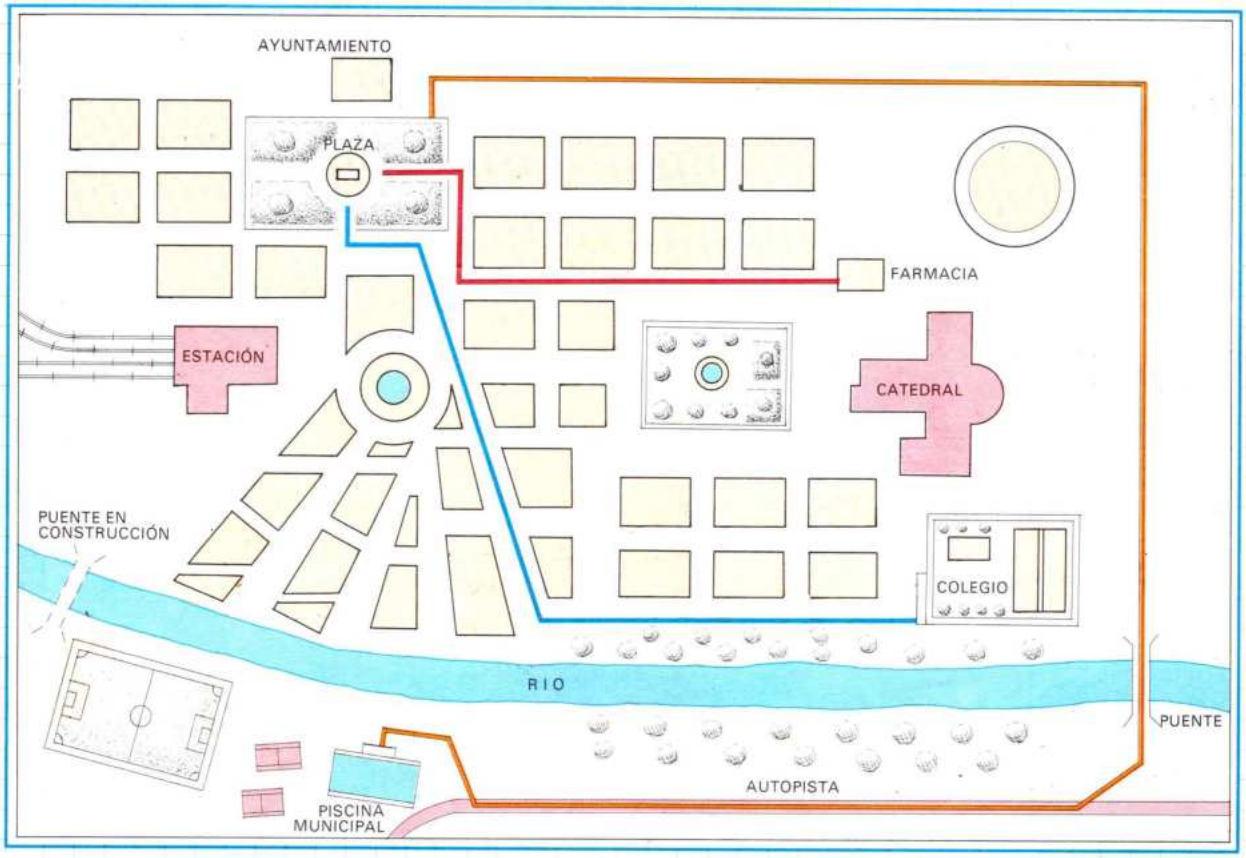
PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

ESCALA DE UN PLANO O MAPA

1. Decir que un plano o mapa ha sido hecho a escala 1 : 5.000 significa que cada segmento de longitud 1 sobre el plano o sobre el mapa representa un segmento de longitud 5.000 sobre el terreno.

   El plano siguiente representa el barrio de una ciudad y está hecho a escala 1 : 5.000.

   1 cm sobre este plano representa 5.000 cm = 50 m sobre el terreno.



   Calcula la longitud del camino que lleva de la plaza a la farmacia. Para ello mide con la regla el recorrido marcado en rojo.

   Calcula la longitud del camino que va de la plaza al colegio (marcado en azul).

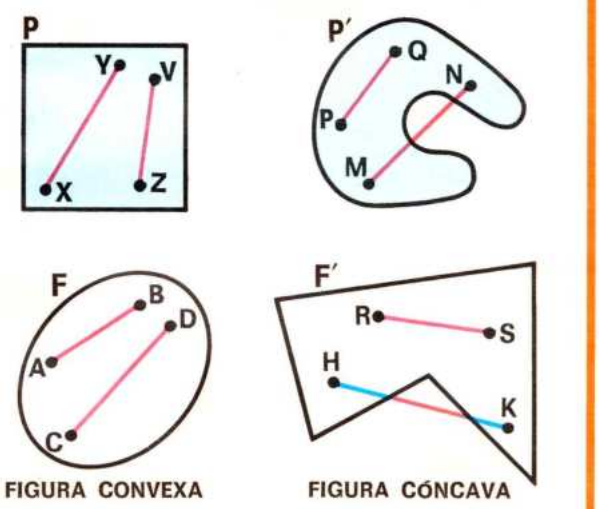
   El camino que lleva desde la plaza a la piscina municipal (en amarillo) mide en realidad 1.500 metros. Calcula, sin medir, la longitud de este camino sobre el mapa. Después comprueba el resultado midiendo sobre el mapa.

   Mide con la regla la distancia entre dos puntos del mapa y expresa la distancia real que hay entre dichos puntos.

TEMA 18 ÁNGULOS: CLASES

1. Ángulo convexo y ángulo cóncavo

Figuras convexas y figuras cóncavas.



Imagínate dos piscinas que tengan la forma de las figuras **P** y **P'**.

- En la piscina **P** se puede ir nadando en línea recta de un punto cualquiera a otro punto cualquiera de la piscina.
- En cambio, en la piscina **P'** esto no es siempre posible. Desde **M** hasta **N** no se puede ir nadando en línea recta.

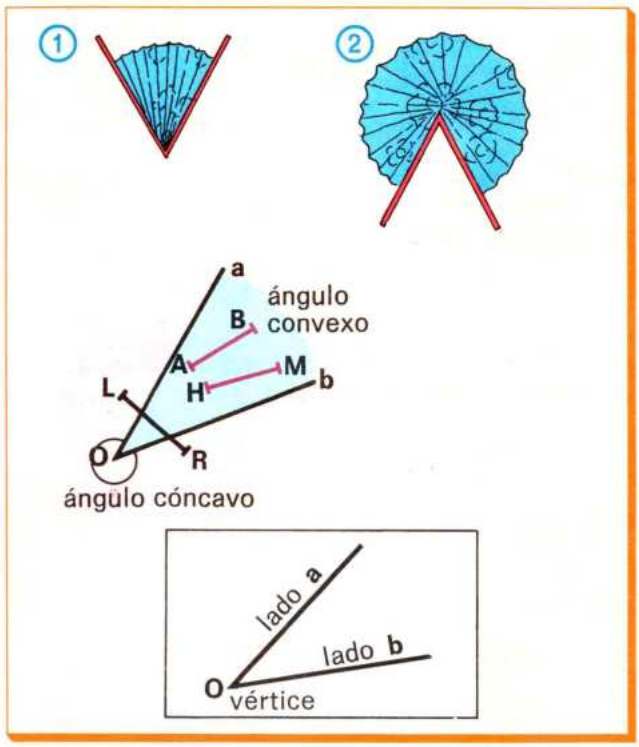
La figura **P** es una **figura convexa,** y la figura **P'** es una **figura cóncava.**

Observa que en una figura convexa como la figura **F**, los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, que unen dos puntos cualesquiera de **F**, están contenidos totalmente en la figura **F**.

En cambio, esto no sucede con la figura cóncava **F'**; la parte roja del segmento $\overline{HK}$ no está contenida en **F'**.

Una figura plana se dice que es convexa cuando, al elegir dos puntos A y B cualesquiera de la misma, el segmento $\overline{AB}$ está incluido en dicha figura.

Ángulo convexo y ángulo cóncavo.



- Con un abanico se pueden materializar diversas clases de ángulos.

El abanico en la posición (1) forma un ángulo convexo, y en la posición (2) forma un ángulo cóncavo.

- Las semirrectas **a** y **b** de origen el punto **O** determinan en el plano dos regiones que están una coloreada de azul y otra de rojo.

La región azul es un ángulo convexo, y la región roja es un ángulo cóncavo.

Observa que en el ángulo convexo los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{HM}$ están todos contenidos en el ángulo.

En cambio, en el ángulo cóncavo hay segmentos como $\overline{LR}$ que tienen una parte no contenida en el ángulo.

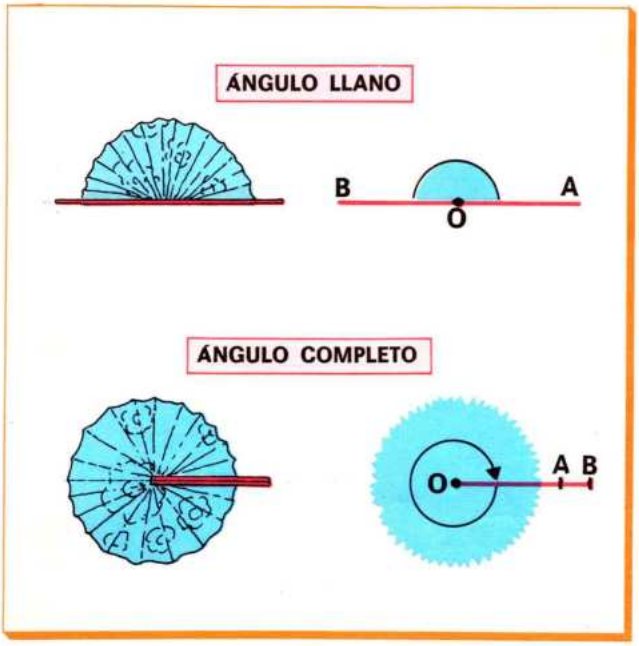
Las semirrectas **a** y **b** son los lados tanto del ángulo convexo como del ángulo cóncavo.

El punto **O** es el vértice de ambos ángulos.

Ángulo es la parte del plano limitada por dos semirrectas del mismo origen.
Dos semirrectas del mismo origen limitan dos ángulos, uno convexo y otro cóncavo.

2. Ángulo llano

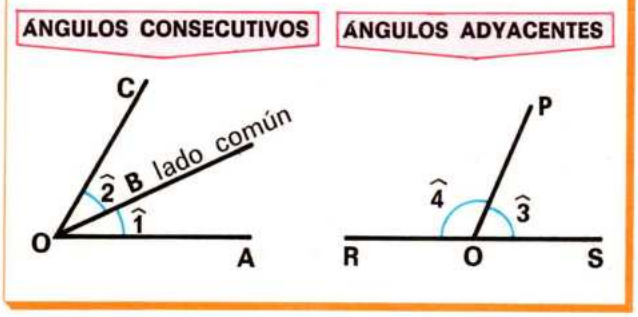
Ángulo llano, ángulo nulo y ángulo completo.



- Si las dos semirrectas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ que forman el ángulo son dos semirrectas de la misma dirección y de sentido contrario (semirrectas opuestas), entonces los dos ángulos son iguales y se llaman **ángulos llanos.**
- Si las dos semirrectas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ coinciden, el ángulo convexo que forman se anula y el ángulo cóncavo cubre todo el plano y se llama **ángulo completo.**

Ángulo llano es el ángulo formado por dos semirrectas del mismo origen y opuestas.

Ángulos consecutivos y ángulos adyacentes.



Observa que los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$ tienen el vértice **O** común y un lado común (el lado $\overline{OB}$).

Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$ son **ángulos consecutivos.**

Los ángulos $\hat{3}$ y $\hat{4}$ también son consecutivos, pero los lados no comunes $\overline{OS}$ y $\overline{OR}$ están sobre la misma recta. Se llaman **ángulos adyacentes.**

Ángulos consecutivos son dos ángulos que sólo tienen en común un vértice y un lado.
Ángulos adyacentes son dos ángulos consecutivos que tienen los lados no comunes sobre la misma recta.

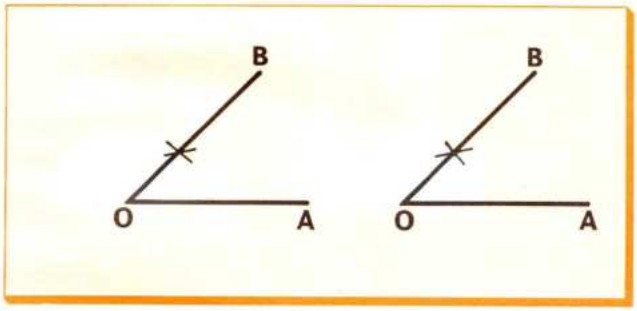
1. Con un transportador de ángulos, compara estos ángulos:

2. Dibuja un par de ángulos consecutivos y otro par de ángulos adyacentes.

3. De las siguientes figuras, indica las que son convexas y las que son cóncavas:

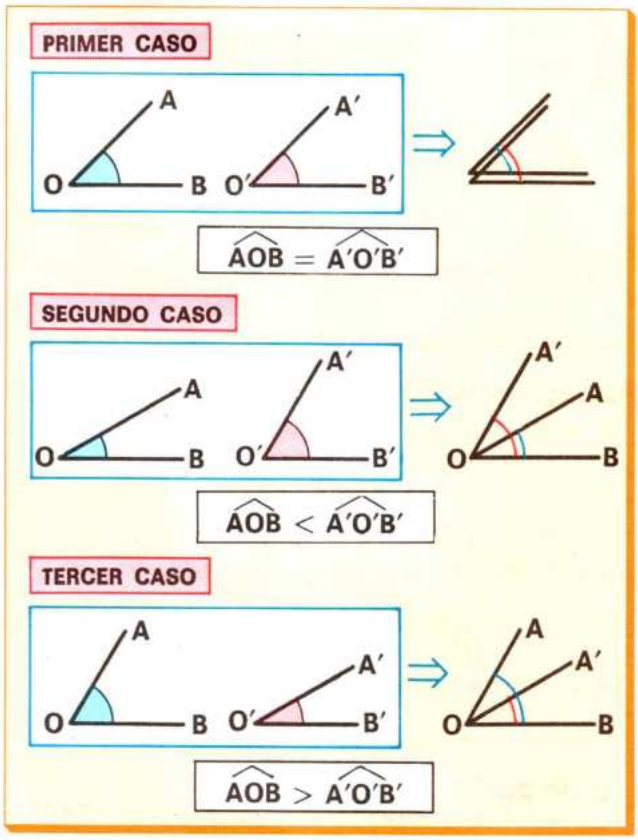
4. Traza dos semirrectas con el mismo origen.
Así se forma un ángulo convexo y uno cóncavo. Colorea de azul el primero y de rojo el segundo.

3. Igualdad y desigualdad de ángulos



Transportador de ángulos.

Una hoja de papel rectangular o semicircular, mejor si es un papel transparente, puede servir como transportador de ángulos. El transportador de ángulos permite, en primer lugar, comparar dos ángulos, es decir, averiguar si son iguales o averiguar cuál de ellos es mayor, y en segundo lugar permite construir un ángulo igual a uno dado. En la figura se indica cómo se procede para señalar en el transportador un ángulo $\widehat{AOB}$.



Comparación de ángulos.

PRIMER CASO

Compara los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'O'B'}$

Al llevar el lado O'A' sobre el lado OA, el lado O'B' coincide con el lado OB

En este caso los dos ángulos coinciden al superponerlos y diremos que son **ángulos iguales:** $\widehat{A'O'B'} = \widehat{AOB}$, o tienen la misma amplitud.

SEGUNDO CASO

Compara los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'O'B'}$

Al llevar el lado O'A' sobre el lado OA, el lado O'B' cae dentro del ángulo $\widehat{AOB}$

En este caso el ángulo $\widehat{AOB}$ es mayor que el ángulo $\widehat{A'O'B'}$:

$\widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'}$, o bien $\widehat{A'O'B'} < \widehat{AOB}$

TERCER CASO

Compara los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'O'B'}$

Al llevar el lado O'A' sobre el lado OA, el lado OB queda dentro del ángulo $\widehat{A'O'B'}$

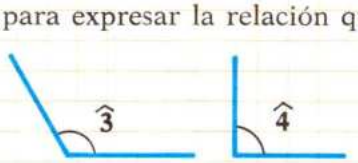
En este caso el ángulo $\widehat{A'O'B'}$ es mayor que el ángulo $\widehat{AOB}$:

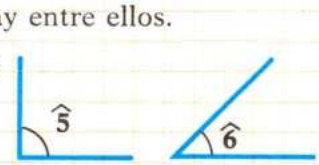
$\widehat{A'O'B'} > \widehat{AOB}$, o bien $\widehat{AOB} < \widehat{A'O'B'}$

1. Compara con una hoja de papel transparente los siguientes pares de ángulos.

Después utiliza el signo $=$, $>$ o $<$ para expresar la relación que hay entre ellos.

a)

b) 

c) 

2. Dibuja un ángulo $\hat{1}$ que sea menor que un ángulo llano.

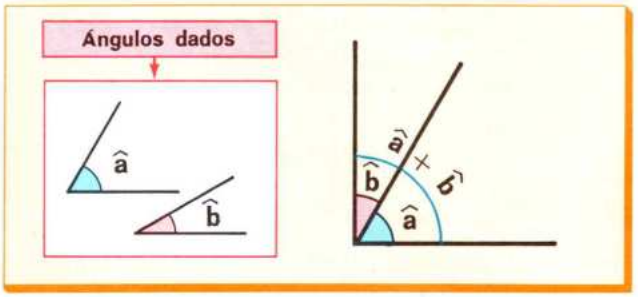
¿Cómo es el ángulo $\hat{1}$, convexo o cóncavo?

3. Dibuja un ángulo $\hat{2}$ que sea mayor que un ángulo llano.

¿Cómo es el ángulo $\hat{2}$, convexo o cóncavo?

4. Operaciones con ángulos. Bisectriz

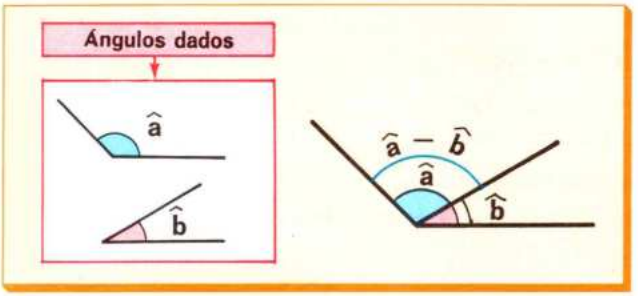
Suma de ángulos.



Vamos a sumar los ángulos $\hat{a}$ y $\hat{b}$.

Para ello, se construye con un transportador un ángulo igual al $\hat{a}$ y a continuación se lleva un ángulo igual al $\hat{b}$ de modo que ambos ángulos sean consecutivos, como indica la figura.

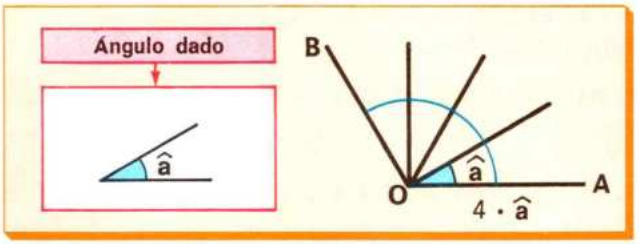
Resta de ángulos.



Dados dos ángulos $\hat{a}$ y $\hat{b}$ de modo que el ángulo $\hat{a}$ sea mayor que el ángulo $\hat{b}$, se puede hallar el ángulo $\hat{a} - \hat{b}$ del modo siguiente:

- Primero se construye un ángulo igual al ángulo $\hat{a}$.
- Después se lleva sobre $\hat{a}$ el ángulo $\hat{b}$ como indica la figura.

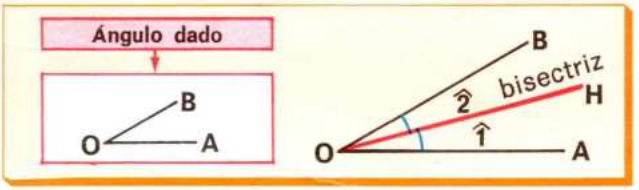
Multiplicación de un ángulo por un número natural.



Dado el ángulo $\hat{a}$, el producto del ángulo $\hat{a}$ por 4 es la suma de cuatro ángulos iguales al ángulo $\hat{a}$:

$$\widehat{AOB} = 4 \cdot \hat{a}$$

División de un ángulo en dos ángulos iguales. Bisectriz.



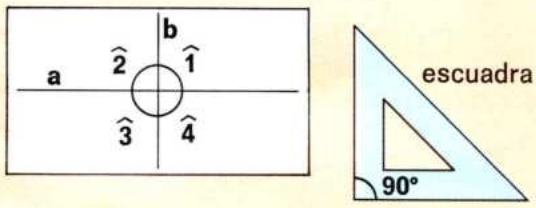
- Dibuja un ángulo $\widehat{AOB}$ en una cuartilla.
- Dobla la cuartilla de modo que el lado **OA** coincida con el lado **OB**. Desdobla y marca el doblez con el lápiz. La semirrecta **OH** se llama bisectriz del ángulo $\widehat{AOB}$ y lo divide en dos ángulos iguales: $\hat{1}$ y $\hat{2}$.

1. Calcula y contesta:

a) ① $\hat{a} + \hat{b}$ ② $\hat{b} + \hat{a}$ ③ $\hat{a} - \hat{b}$ ④ $\hat{a} + \hat{c}$ ⑤ $\hat{a} + \hat{b} - \hat{c}$ ⑥ $2 \cdot \hat{c}$

b) ¿Son iguales los dos ángulos que se obtienen en ① y ②?

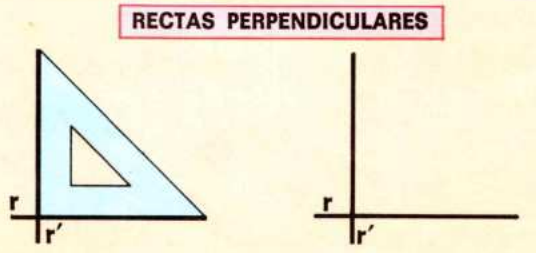
5. Rectas perpendiculares. La escuadra



a ⊥ b = a es perpendicular a b

Rectas perpendiculares. La escuadra.

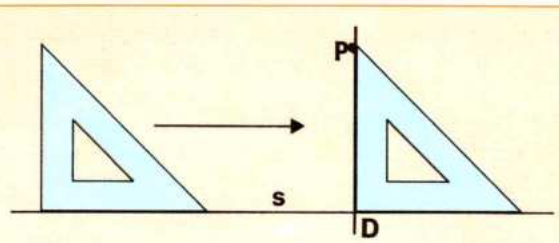
- Dobla una cuartilla por la mitad. Sin desdoblar, dobla de nuevo de modo que el pliegue se superponga sobre el mismo. Al desdoblar aparecen marcadas dos rectas **a** y **b** que forman cuatro ángulos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$ y $\hat{4}$ iguales. Estos ángulos iguales se llaman **ángulos rectos**, y las rectas **a** y **b**, **rectas perpendiculares.** Se escribe **a ⊥ b**, y se lee: **a es perpendicular a b.**
- La escuadra es un instrumento que tiene dos bordes que forman ángulo recto; por esta razón se pueden trazar con ella rectas perpendiculares.



Trazado de rectas perpendiculares con la escuadra.

Toma una escuadra y traza las dos rectas por los lados del ángulo recto de la escuadra.

Llamemos **r** y **r'** a las dos rectas trazadas. Las dos rectas **r** y **r'** son perpendiculares: **r ⊥ r'**.



PD = distancia del punto P a la recta s

Trazado de la perpendicular a una recta desde un punto exterior.

Observa también cómo se traza una recta perpendicular a la recta **s** que pase por el punto **P**. Para ello se apoya uno de los bordes que forman el ángulo recto de la escuadra sobre la recta **s** y se desliza la escuadra por la recta **s** hasta que el otro borde del ángulo recto de la escuadra pase por el punto **P**. Finalmente se traza la recta **PD**, que será la perpendicular buscada.

El punto **D** es el **pie de la perpendicular**, y la longitud del segmento $\overline{PD}$ se llama **distancia del punto P a la recta s.**

Rectas perpendiculares son las rectas secantes que, al cortarse, forman ángulos rectos. Distancia de un punto a una recta es el segmento de perpendicular trazado desde el punto a la recta.

1. Traza y contesta:

A. Traza una recta **r** con la regla y desde un punto **P** exterior traza una perpendicular a **r** con la escuadra.

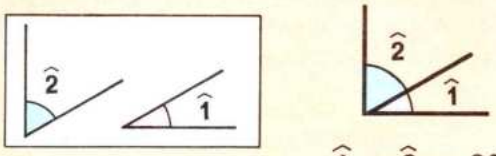
B. Traza una recta **r** con la regla y desde un punto **P** de ella traza con la escuadra una perpendicular a **r**.

C. Traza con la escuadra dos perpendiculares **s** y **t** a una **r**. ¿Cómo son las rectas **s** y **t**?

6. Ángulos complementarios y ángulos suplementarios

Ángulos complementarios.

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS



$\hat{1} + \hat{2} = 90°$

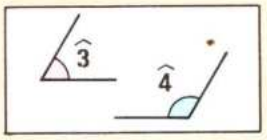
Ángulos complementarios son dos ángulos que suman un ángulo recto o 90°. Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$ son complementarios porque $\hat{1} + \hat{2} =$ **1 ángulo recto** o **90°.**

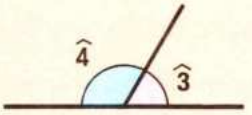
Complemento de un ángulo es lo que le falta para valer un ángulo recto.

El complemento del ángulo $\hat{1}$ es el ángulo $\hat{2}$.

Ángulos suplementarios.

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS





$\hat{4} + \hat{3} = 180°$

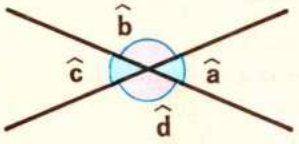
Ángulos suplementarios son dos ángulos que suman un ángulo llano o 180°. Los ángulos $\hat{3}$ y $\hat{4}$ son suplementarios porque $\hat{3} + \hat{4} =$ **180°.**

Suplemento de un ángulo es lo que le falta para valer un ángulo llano.

El suplemento del ángulo $\hat{3}$ es el ángulo $\hat{4}$.

Ángulos opuestos por el vértice.

ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE



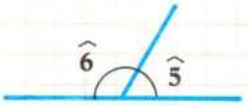
$\hat{a} + \hat{b} =$ 1 llano
$\hat{c} + \hat{b} =$ 1 llano
$\Big\}\ \hat{a} = \hat{c}$

Ángulos opuestos por el vértice son dos ángulos que tienen el mismo vértice y sus lados son semirrectas opuestas.

Los ángulos $\hat{a}$ y $\hat{c}$ son opuestos por el vértice. También son opuestos por el vértice los ángulos $\hat{b}$ y $\hat{d}$.

Observa que los ángulos opuestos por el vértice son iguales: $\hat{a} = \hat{c}$, porque a los dos les falta el ángulo $\hat{b}$ para valer 1 llano.

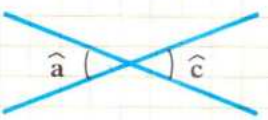
1. Observa los ángulos adyacentes $\hat{5}$ y $\hat{6}$ y los ángulos $\hat{7}$ y $\hat{8}$ y contesta:



- ¿Cuánto suman los ángulos adyacentes $\hat{5}$ y $\hat{6}$? ¿Son suplementarios dos ángulos adyacentes?
- ¿Cuánto suman los ángulos $\hat{7}$ y $\hat{8}$? ¿Son suplementarios los ángulos $\hat{7}$ y $\hat{8}$?
- ¿Son adyacentes los ángulos $\hat{7}$ y $\hat{8}$?

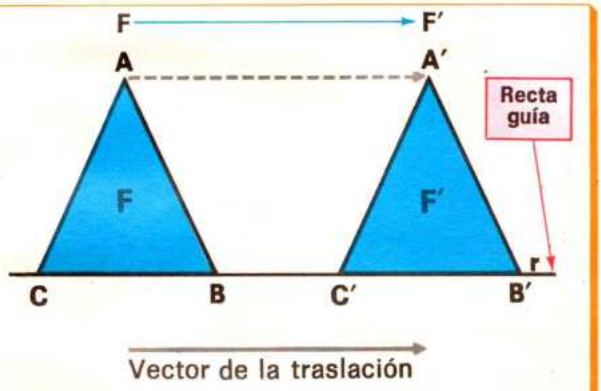
2. Dibuja en tu cuaderno un ángulo agudo $\hat{a}$ y un ángulo obtuso $\hat{b}$.
Traza el complemento de $\hat{a}$, el suplemento de $\hat{a}$ y el suplemento de $\hat{b}$.

3. Dibuja en tu cuaderno dos ángulos opuestos por el vértice.
Recorta el ángulo $\hat{c}$ y su opuesto por el vértice $\hat{a}$. Colócalos después uno sobre el otro y comprueba que $\hat{a} = \hat{c}$.



7. Traslación en el plano: Propiedades

Traslación en el plano.



- Dibuja en una cartulina un triángulo como el **ABC** y recórtalo. Apoyando el lado **CB** sobre una recta **r** (que llamaremos **recta guía**), desliza la cartulina sobre ella. El triángulo ha pasado de la posición **F** a la posición **F'**. Diremos que hemos realizado una traslación del triángulo **ABC**.

  Los puntos **A** y **A'** se dice que son **homólogos** en la traslación; también son homólogos los puntos **B** y **B'**, así como **C** y **C'**.

- El segmento cuyos extremos son el punto **A** y su homólogo **A'**, en este orden, determina la traslación. A este segmento se le llama **segmento-flecha** o **vector de la traslación.**

Propiedades de la traslación.

① $AA' // r$; $BB' // r$; $CC' // r$

② $AB // A'B'$; $AC // A'C'$; $CB // C'B'$

③ $\widehat{A} = \widehat{A}'$; $\widehat{B} = \widehat{B}'$; $\widehat{C} = \widehat{C}'$

Se pueden comprobar las siguientes propiedades:

① La recta determinada por dos puntos homólogos, **A** y **A'**, por ejemplo, es paralela a la recta guía:
$AA' // r$; $BB' // r$; $CC' // r$.

② Al realizar una traslación, todos los puntos del segmento $\overline{AB}$ se trasladan la misma distancia; luego las rectas **AB** y **A'B'** son paralelas. De la misma forma, $AC // A'C'$ y $CB // C'B'$.

③ Los ángulos $\widehat{A}'$, $\widehat{B}'$ y $\widehat{C}'$ son, respectivamente, iguales a los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$.

Trasladar una figura F es deslizar la figura en el plano sobre una recta.
La recta determinada por dos puntos homólogos es paralela a la recta guía.
Una traslación conserva las distancias y los ángulos, es decir, transforma segmentos en segmentos iguales y transforma ángulos en ángulos iguales.

1. Lee y contesta:

Traza en tu cuaderno con la escuadra dos rectas perpendiculares. Traza también la perpendicular a una recta **r** desde un punto **P** exterior a ella.

¿Puedes trazar varias rectas perpendiculares a la recta **r** desde el punto **P**?

2. Traza una recta r y dos perpendiculares r' y r'' a la recta r.

¿Cómo son entre sí **r'** y **r''**?

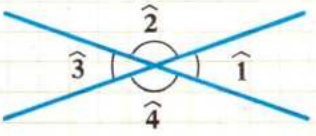
3. Dibuja dos ángulos complementarios.

¿Cuál es su suma? Dibuja también dos ángulos suplementarios. ¿Cuál es su suma?

4. Calcula las sumas:

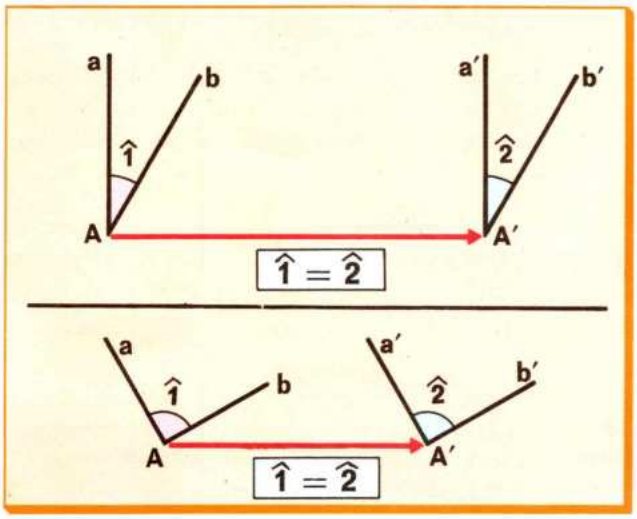
a) $\widehat{1} + \widehat{2}$ b) $\widehat{3} + \widehat{2}$

¿Cómo son los ángulos opuestos por el vértice?



8. Ángulos de lados paralelos

¿Cómo son los ángulos de lados paralelos?



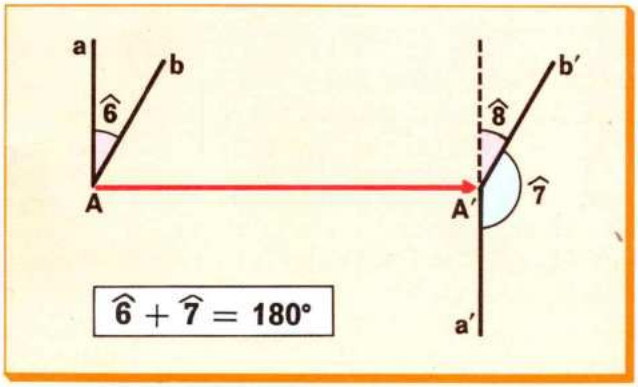
PRIMER CASO

Cuando los dos ángulos de lados paralelos son agudos o los dos son obtusos

Observa los ángulos agudos $\hat{1}$ y $\hat{2}$, que tienen sus lados paralelos: **a**//**a'** y **b**//**b'**.

La traslación de vector $\overrightarrow{AA'}$, que lleva **A** sobre **A'**, transforma la semirrecta **a** en la semirrecta **a'**, ya que la traslación transforma una semirrecta en otra paralela a ella, y por el punto **A'** sólo pasa una paralela a la recta **a**.

Del mismo modo, **b** se transforma en **b'**, y el ángulo $\hat{1}$ se transforma por la traslación en el ángulo $\hat{2}$, y por tanto, ambos son iguales.



SEGUNDO CASO

Cuando los dos ángulos de lados paralelos son uno agudo y otro obtuso

Observa los ángulos $\hat{6}$ y $\hat{7}$ de lados paralelos. El $\hat{6}$ es agudo y el $\hat{7}$ es obtuso.

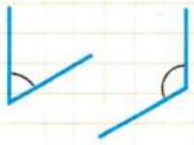
La traslación que lleva **A** sobre **A'** transforma el ángulo $\hat{6}$ en el $\hat{8}$. Ahora bien, como $\hat{7}$ y $\hat{8}$ son suplementarios, también lo serán $\hat{6}$ y $\hat{7}$.

Luego dos ángulos de lados paralelos, uno agudo y otro obtuso, son suplementarios.

Dos ángulos de lados paralelos son iguales si ambos son agudos o si ambos son obtusos, y son suplementarios si uno es agudo y otro es obtuso.

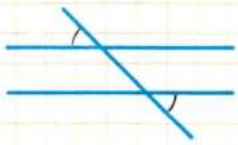
1. Observa y responde:

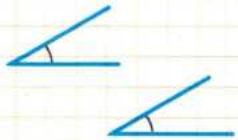
Los ángulos indicados en las siguientes figuras tienen los lados paralelos. Indica en cada caso si son iguales o suplementarios.

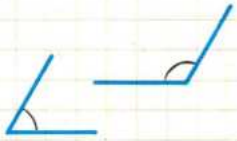
a) 

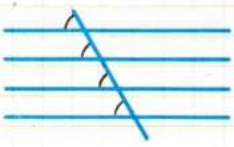
b)

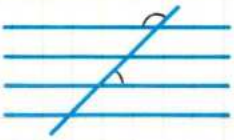
c)

d) 

e) 

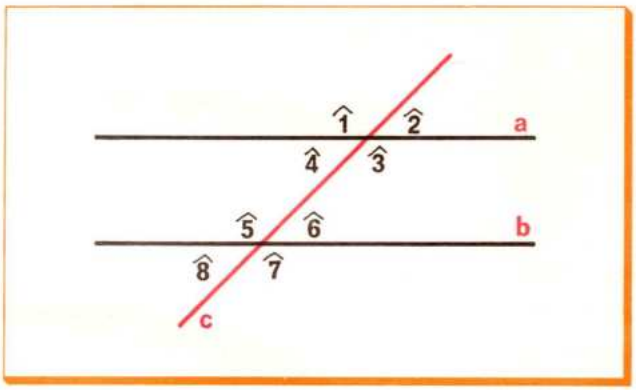
f) 

g) 

h) 

i)

9. Ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una secante



Cuando dos rectas paralelas **a** y **b** son cortadas por una secante **c**, se forman ocho ángulos.

Según la posición que ocupan, los ángulos reciben nombres diferentes. Como hay muchos de estos ángulos que tienen los lados paralelos, éstos serán, según sabemos, iguales o suplementarios.

En el siguiente cuadro aparece la denominación de estos ángulos, indicando los que son iguales y los que son suplementarios.

Ángulos de lados paralelos que son iguales por ser ambos agudos o ambos obtusos	**Ángulos de lados paralelos que son suplementarios por ser uno agudo y el otro obtuso**	**Ángulos iguales por opuestos por el vértice**	**Ángulos suplementarios por ser adyacentes**
Ángulos correspondientes son los siguientes pares de ángulos: $\hat{1}$ y $\hat{5}$, $\hat{4}$ y $\hat{8}$, $\hat{2}$ y $\hat{6}$, $\hat{3}$ y $\hat{7}$	**Ángulos conjugados internos** son los siguientes pares de ángulos: $\hat{3}$ y $\hat{6}$, $\hat{4}$ y $\hat{5}$	Son los siguientes pares de ángulos: $\hat{1}$ y $\hat{3}$, $\hat{2}$ y $\hat{4}$, $\hat{5}$ y $\hat{7}$, $\hat{6}$ y $\hat{8}$	Son los siguientes pares de ángulos: $\hat{1}$ y $\hat{4}$, $\hat{2}$ y $\hat{3}$, $\hat{3}$ y $\hat{4}$, $\hat{5}$ y $\hat{6}$, $\hat{6}$ y $\hat{7}$, $\hat{7}$ y $\hat{8}$, $\hat{5}$ y $\hat{8}$
Ángulos alternos internos son los siguientes pares de ángulos: $\hat{3}$ y $\hat{5}$, $\hat{4}$ y $\hat{6}$	**Ángulos conjugados externos** son los siguientes pares de ángulos: $\hat{2}$ y $\hat{7}$, $\hat{1}$ y $\hat{8}$		
Ángulos alternos externos son los siguientes pares de ángulos: $\hat{1}$ y $\hat{7}$, $\hat{2}$ y $\hat{8}$			

Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante, los ángulos correspondientes alternos internos, alternos externos y opuestos por el vértice son iguales, y los conjugados internos, conjugados externos y adyacentes son suplementarios.

1. Observa los ángulos de la figura y completa en tu cuaderno:

a) Los ángulos alternos internos son ...

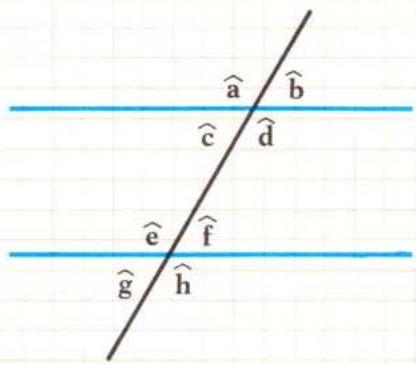
b) Los ángulos correspondientes son ...

c) Los ángulos opuestos por el vértice son ...

d) Los ángulos adyacentes son ...

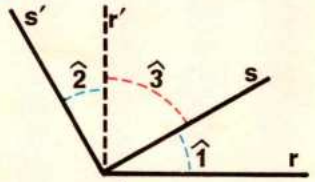
e) Los ángulos conjugados internos son ...

f) De los ocho ángulos de la figura hay cuatro agudos que son iguales entre sí y otros cuatro obtusos que son también iguales entre sí. Escribe por separado estos dos grupos de ángulos: los que son iguales al ángulo $\hat{a}$ y los que son iguales al ángulo $\hat{b}$.



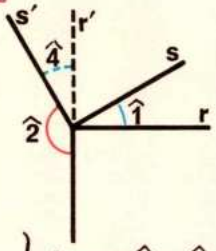
10. Ángulos de lados perpendiculares

PRIMER CASO



$\widehat{1} + \widehat{3} = 1$ recto
$\widehat{2} + \widehat{3} = 1$ recto
} luego $\widehat{1} = \widehat{2}$

SEGUNDO CASO



$\widehat{1} = \widehat{4}$
$\widehat{2} + \widehat{4} = 180°$
} luego $\widehat{1} + \widehat{2} = 180°$

Relaciones entre ángulos de lados perpendiculares.

PRIMER CASO

Cuando los dos ángulos de lados perpendiculares son agudos o los dos son obtusos

Comprueba con tu escuadra que el ángulo agudo $\widehat{1}$ de lados **r** y **s** y el ángulo agudo $\widehat{2}$ de lados **r'** y **s'** tienen sus lados perpendiculares: $r \perp r'$ y $s \perp s'$.

Se observa que $\widehat{1} = \widehat{2}$, ya que a ambos les falta el ángulo $\widehat{3}$ para valer un ángulo recto.

SEGUNDO CASO

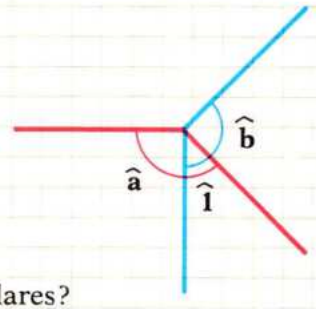
Cuando los dos ángulos de lados perpendiculares son uno agudo y el otro obtuso

Como el ángulo $\widehat{4}$ es igual al $\widehat{1}$, es decir, $\widehat{4} = \widehat{1}$, y como los ángulos $\widehat{2}$ y $\widehat{4}$ son suplementarios, también lo serán el $\widehat{2}$ y el $\widehat{1}$. Por tanto, cuando dos ángulos de lados perpendiculares son uno agudo y el otro obtuso ambos son suplementarios.

Dos ángulos de lados perpendiculares son iguales si los dos son agudos o si ambos son obtusos, y son suplementarios si uno es agudo y el otro es obtuso.

1. Observa las figuras y contesta:

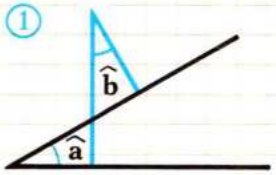
A. Comprueba con la escuadra que los ángulos $\widehat{a}$ (con lados de color rojo) y $\widehat{b}$ (con lados de color azul tienen los lados perpendiculares.

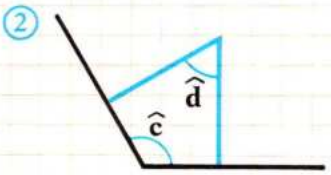


El ángulo $\widehat{a}$ = 1 recto + ángulo $\widehat{1}$.

- Completa: $\widehat{b}$ = 1 recto + ...
- ¿Cómo son el ángulo $\widehat{a}$ y el $\widehat{b}$?
- ¿Cómo son dos ángulos obtusos de lados perpendiculares?

B. Comprueba que los ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ de la figura ① y los ángulos $\widehat{c}$ y $\widehat{d}$ de la figura ② tienen los lados perpendiculares. ¿Cómo son los ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$? ¿Y los ángulos $\widehat{c}$ y $\widehat{d}$?





2. Dibuja un ángulo agudo y otro obtuso.

En cada uno de ellos traza desde un punto interior las perpendiculares a los lados.

¿Cómo son, en cada caso, el ángulo formado por las perpendiculares y el ángulo dado?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Traza dos rectas perpendiculares con la escuadra.

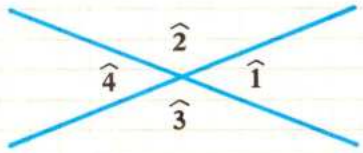
¿Cuántos ángulos obtienes? ¿Cómo son estos ángulos?

2. En la siguiente figura, indica:

a) Dos ángulos opuestos por el vértice.

b) Dos ángulos adyacentes.

c) Dos ángulos suplementarios.

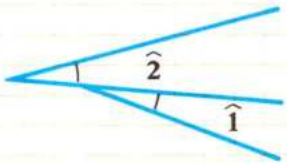


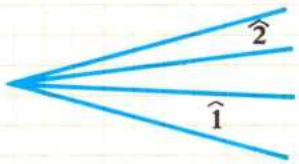
3. ¿Qué ángulo resulta al sumar los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$?

4. Se sabe que dos ángulos adyacentes son siempre suplementarios.

¿Es cierto que dos ángulos suplementarios son siempre adyacentes?

5. ¿Son consecutivos los siguientes pares de ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$?

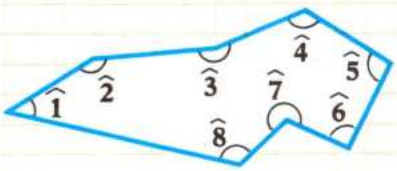




6. Traza dos rectas paralelas cortadas por una secante ocupando una cuartilla. Mediante dos pliegues, marca las bisectrices de dos ángulos alternos internos.

¿Cómo son estas bisectrices?

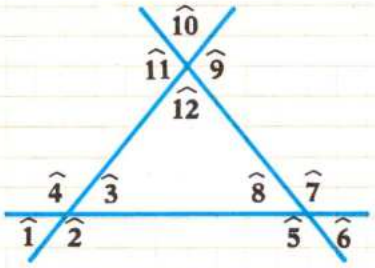
7. En la siguiente figura, indica los ángulos convexos y los ángulos cóncavos.



8. Dibuja dos figuras convexas y dos figuras cóncavas.

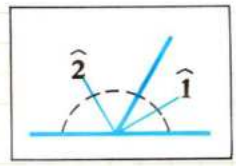
9. Dibuja dos semirrectas con el mismo origen. Se forma un ángulo convexo y otro cóncavo. Colorea de azul el primero y de rojo el segundo.

10. En la siguiente figura, indica los pares de ángulos que son opuestos por el vértice y los pares de ángulos que son adyacentes.



11. Si dos ángulos suman un ángulo llano. ¿cuánto suman sus mitades?

12. Recorta la mitad de un folio o cuartilla y dibuja dos ángulos adyacentes $\hat{1}$ y $\hat{2}$. Haz dos pliegues para trazar las bisectrices de los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$. Desdobla y comprueba con la escuadra que estas bisectrices forman un ángulo recto.



13. Dibuja dos ángulos consecutivos. Colorea de rojo el lado común y de azul los lados no comunes.

14. Dibuja dos ángulos adyacentes. Llámales $\hat{1}$ y $\hat{2}$. Completa en tu cuaderno $\hat{1} + \hat{2} = \ldots$

15. Si dos ángulos son adyacentes e iguales ¿cuánto vale cada uno de ellos?

16. Dibuja un ángulo recto en un papel. Por plegado, divide el ángulo en dos partes iguales. Divide también cada ángulo formado en dos partes iguales.

¿En cuántos ángulos iguales ha quedado dividido el ángulo recto?

17. Dibuja un ángulo recto $\hat{a}$ y un ángulo agudo $\hat{b}$ y calcula:

$\hat{a} + \hat{b}$ $\quad \hat{a} - \hat{b}$ $\quad 2 \cdot \hat{a}$ $\quad 3 \cdot \hat{a}$ $\quad 4 \cdot \hat{a}$

18. Comprueba si es recto el ángulo que forman dos paredes colocando la escuadra en el suelo y sobre las paredes.

19. Coloca cuatro clavos en el suelo del patio en forma de rectángulo y únelos con cuerdas. Utiliza la escuadra para estar seguro de que las cuerdas forman ángulo recto.

20. Traza dos rectas paralelas y después traza una perpendicular a ambas.

¿Cómo son los ocho ángulos que se forman?

21. ¿En qué caso los ángulos opuestos por el vértice son suplementarios? Dibújalos.

22. Observa que el ángulo complementario del ángulo $\hat{1}$ es el $\hat{2}$.

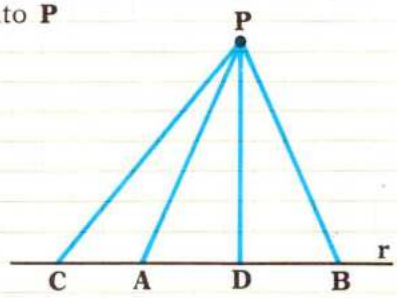
Construye con tu escuadra el complementario del ángulo $\hat{3}$.

23. Traza en tu cuaderno una perpendicular desde un punto **P** a una recta **r** como se ve en la figura.

¿Cómo se llama el segmento $\overline{PD}$?

Las oblicuas $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ se apartan igual del pie de la perpendicular: $\overline{AD} = \overline{DB}$.

Comprueba midiendo con tu regla que miden igual los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$.

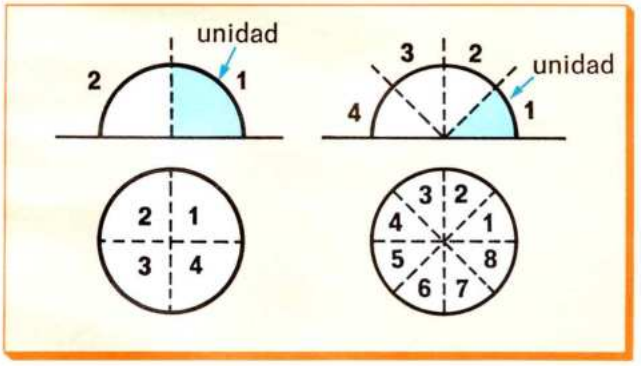


La oblicua $\overline{PC}$ se aparta más del pie de la perpendicular que la oblicua $\overline{PA}$.

Comprueba que el segmento $\overline{PC}$ es mayor que el segmento $\overline{PA}$.

TEMA 19 OPERACIONES CON MEDIDAS DE ÁNGULOS

1. Medida de ángulos. Sistema sexagesimal.



Medir ángulos.

Al igual que para medir segmentos se elige un segmento como unidad, para medir la amplitud de los ángulos se elige un ángulo como unidad.

- Si se toma como unidad el ángulo recto, , la medida de un ángulo llano es 2 y la medida de la circunferencia es 4.
- Si la unidad es la mitad de un ángulo recto, la medida de un ángulo llano es 4 y la medida de una circunferencia es 8.

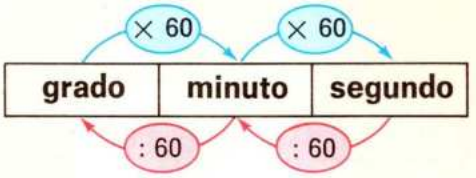
1 ángulo recto = 90°

1 ángulo llano = 180°

1 circunferencia = 360°

1° = 60′

1′ = 60″



Sistema sexagesimal.

La unidad principal de medida de ángulos es el **grado sexagesimal.**

El grado sexagesimal es el ángulo que resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales.

Para medir ángulos se utiliza el **transportador graduado** o **semicírculo graduado.**

Este semicírculo está dividido en 180 partes iguales, y cada una de ellas es también un grado sexagesimal.

Para medir un ángulo $\widehat{AOB}$ se coloca sobre él el semicírculo graduado como indica la figura.

El segundo lado **OB** indica la medida del ángulo.

El ángulo $\widehat{AOB}$ mide 135 grados y se escribe:

medida de $\widehat{AOB} = 135°$, o también $\widehat{AOB} = 135°$

Para dar más precisión a la medida de ángulos se utilizan otras unidades más pequeñas que el grado: el **minuto** y el **segundo.**

Cada grado vale 60 minutos y cada minuto vale 60 segundos.

El grado, el minuto y el segundo son unidades para medir ángulos y forman un **sistema sexagesimal de unidades.**

Para medir ángulos se utilizan el grado, el minuto y el segundo, que forman un sistema sexagesimal, es decir, que cada unidad es sesenta veces mayor que la unidad inmediata inferior.

1. ¿Cuántos minutos tiene?

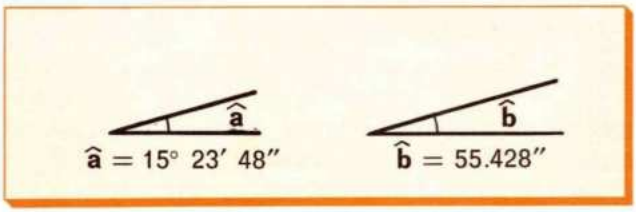
a) 1° b) 3° c) 72° d) 90° e) 360° f) 60″ g) 120″ h) 360″

2. ¿Cuántos segundos tiene?

a) 1′ b) 3′ c) 82′ d) 1° e) 3° f) 90° g) 120° h) 135°

2. Medidas de ángulos en forma compleja y en forma incompleja.

Complejos e incomplejos de amplitud.



La medida del ángulo $\hat{a}$ está expresada en grados, minutos y segundos, es decir, en forma compleja; en cambio, la medida del ángulo $\hat{b}$ está expresada sólo en segundos, es decir, en forma incompleja.

Paso de incomplejo a complejo.

Expresa en grados, minutos y segundos la medida del ángulo $\hat{b} = 55.428''$.

PRIMER PASO

Se divide 55.428 entre 60; el resto será el número de segundos del resultado:

$$\begin{array}{r|l} 55428'' & 60 \\ 142 & 923' \\ 228 & \\ \mathbf{48''} & \end{array}$$

SEGUNDO PASO

Se dividen los 923′ entre 60; el cociente serán los grados y el resto, los minutos del resultado:

$$\begin{array}{r|l} 923' & 60 \\ 323 & \mathbf{15°} \\ \mathbf{23'} & \end{array}$$

EN LA PRÁCTICA

Las dos divisiones se colocan así:

$$\begin{array}{r|l|l} 55428'' & 60 & \\ 142 & 923' & 60 \\ 228 & 323 & 15° \\ 48'' & 23' & \end{array}$$

Incomplejo **55.428″ = 15° 23′ 48″** Complejo

Paso de complejo a incomplejo.

Expresa en segundos la medida del ángulo $\hat{a} = 12° 30' 42''$

Sabemos que $12° 30' 42'' = 12° + 30' + 42''$

① Pasamos los grados a minutos.

② Pasamos los minutos a segundos.

① $12° + 30' + 42'' = (12 \times 60)' + 30' + 42'' = \boxed{720' + 30'} + 42'' = \boxed{750'} + 42''$

② $750' + 42'' = (750 \times 60)'' + 42'' = 45.000'' + 42'' = 45.042''$

Complejo **12° 30′ 42″ = 45.042″** Incomplejo

1. Expresa en grados, minutos y segundos:

a) 88.215″ c) 46.538″ e) 15.784″ g) 12.000″

b) 60.341″ d) 8.179″ f) 100.000″ h) 15.000″

2. Expresa en incomplejo de segundos:

a) 34° 12′ c) 10° 10′ 10″ e) 43° 47′ 26″ g) 73′ 59″

b) 10° 10′ d) 8° 6′ 6″ f) 38′ 42″ h) 32° 32′ 32″

3. Operaciones con medidas de ángulos. I

Suma de medidas de ángulos.

Vamos a sumar dos medidas angulares complejas:

$\hat{a} = 37° \ 52' \ 53''$ $\quad$ $\hat{b} = 29° \ 56' \ 23''$

Para ello se colocan un sumando debajo del otro de modo que coincidan en cada columna las unidades del mismo nombre.

Después se suman: segundos con segundos, minutos con minutos y grados con grados.

Si el número de segundos de la suma es mayor o igual que 60 se convierten en minutos:

$$\begin{array}{r|l} 76'' & 60 \\ 16'' & 1' \end{array}$$

Si el número de minutos de la suma es mayor o igual que 60 se convierten en grados:

$$\begin{array}{r|l} 109' & 60 \\ 49' & 1° \end{array}$$

Ángulos dados

$\hat{a} = 37° \ 52' \ 53''$
$\hat{b} = 29° \ 56' \ 23''$

Suma $\hat{a} + \hat{b}$

$$\begin{array}{rrr} 37° & 52' & 53'' \\ +\ 29° & 56' & 23'' \\ \hline 66° & 108' & 76'' \\ & & 1' \ \ 16'' \\ \hline 66° & 109' & 16'' \\ & 1° & 49' \\ \hline \end{array}$$

$\hat{a} + \hat{b} = 67° \ 49' \ 16''$

Resta de medidas de ángulos.

Vamos a realizar la resta $\hat{a} - \hat{b}$:

$\hat{a} = 48°$ $\quad$ $\hat{b} = 27° \ 30' \ 42''$

Como en el minuendo no hay minutos ni segundos, se transforma 1° de los 48 de $\hat{a}$ en minutos:

$\hat{a} = 48° = 47° + 1° = 47° + 60'$

Como el ángulo $\hat{a}$ carece también de segundos, se transforma 1 minuto en segundos:

$\hat{a} = 47° + 60' = 47° + 59' + 1' = 47° + 59' + 60''$

Así ya es posible hacer la resta.

Observa cómo se hace esta otra resta $\hat{c} - \hat{d}$:

$\hat{c} = 37° \ 27' \ 32''$ $\quad$ $\hat{d} = 16° \ 35' \ 43''$

$\hat{c} - \hat{d} = 20° \ 51' \ 49''$

Ángulos dados

$\hat{a} = 48°$
$\hat{b} = 27° \ 30' \ 42''$

Resta $\hat{a} - \hat{b}$

$$\begin{array}{rrr} 47° & 59' & 60'' \\ -\ 27° & 30' & 42'' \\ \hline \end{array}$$

$\hat{a} - \hat{b} = 20° \ 29' \ 18''$

Ángulos dados

$\hat{c} = 37° \ 27' \ 32''$
$\hat{d} = 16° \ 35' \ 43''$

Resta $\hat{c} - \hat{d}$

$$\begin{array}{rrr} 36° & 86' & 92'' \\ -\ 16° & 35' & 43'' \\ \hline \end{array}$$

$\hat{c} - \hat{d} = 20° \ 51' \ 49''$

1. Calcula:

a) $32° \ 25' \ 40'' + 12° \ 56' \ 18''$
b) $42° \ 50' \ 30'' + 15° \ 15' \ 15''$
c) $48° \ 48' \ 48'' + 10° \ 10' \ 10''$
d) $68° \ 35' \ 42'' + 56° \ 46' \ 39''$

2. Halla:

a) $8° - 3° \ 15' \ 12''$
b) $38° \ 42' \ 27'' - 15° \ 36' \ 30''$
c) El ángulo complementario de $35° \ 26' \ 42''$ (lo que le falta para valer 90°).
d) El ángulo suplementario de $35° \ 36' \ 42''$ (lo que le falta para valer 180°).

4. Operaciones con medidas de ángulos. II

Multiplicación de medidas de ángulos por un número natural.

Ángulo dado: $\hat{a} = 26°\ 12'\ 30''$

Multiplicación $\hat{a} \times 5$:

$$\begin{array}{rrr} 26° & 12' & 30'' \\ & & \times\ 5 \\ \hline 130° & 60' & \boxed{150''} \\ & 2' & 30'' \\ \hline 130° & \boxed{62'} & 30'' \\ 1° & 2' & \\ \hline \end{array}$$

$5 \cdot \hat{a} = 131°\ 2'\ 30''$

Vamos a multiplicar el ángulo $\hat{a} = 26°\ 12'\ 30''$ por 5. Para ello se multiplican por 5 los segundos, los minutos y los grados. Cuando los segundos o minutos del resultado sean mayores o iguales que 60, se hacen, como en la suma, las conversiones pertinentes:

$$\begin{array}{r|l} 150'' & 60 \\ \hline 30'' & 2' \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 62' & 60 \\ \hline 2' & 1° \end{array}$$

Así resulta que $26°\ 12'\ 30'' \times 5 = \mathbf{131°\ 2'\ 30''}$

División de medidas de ángulos por un número natural.

Ángulo dado: $\hat{b} = 163°\ 50'\ 48''$

División $\hat{b} : 8$

$$\begin{array}{rrr|l} 163° & 50' & 48'' & 8 \\ \hline & & & 20°\ 28'\ 51'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 3° & = & 180' \\ \hline & & 230' \\ & & 70 \\ 6' & = & 360'' \\ \hline & & 408'' \\ & & 00 \end{array}$$

$\times 60$

$\hat{b} : 8 = 20°\ 28'\ 51''$

Vamos a dividir el ángulo $\hat{b} = 163°\ 50'\ 48''$ entre 8.

Para ello se van dividiendo sucesivamente por 8 los grados, los minutos y los segundos. Cuando estas divisiones no sean exactas, los restos se convierten en unidades inferiores.

- División de los grados:

$$\begin{array}{r|l} 163° & 8 \\ \hline 03° & 20° \end{array} \longrightarrow 3° = (3 \times 60)' = 180' \longrightarrow 180' + 50' = 230'$$

- División de los minutos:

$$\begin{array}{r|l} 230' & 8 \\ \hline 70 & 28' \\ 6' & \end{array} \longrightarrow 6' = (6 \times 60)'' = 360'' \longrightarrow 360'' + 48'' = 408''$$

- División de los segundos:

$$\begin{array}{r|l} 408'' & 8 \\ \hline 08 & 51'' \\ 0 & \end{array}$$

Observa el esquema que se sigue para hacer estas divisiones en la práctica.

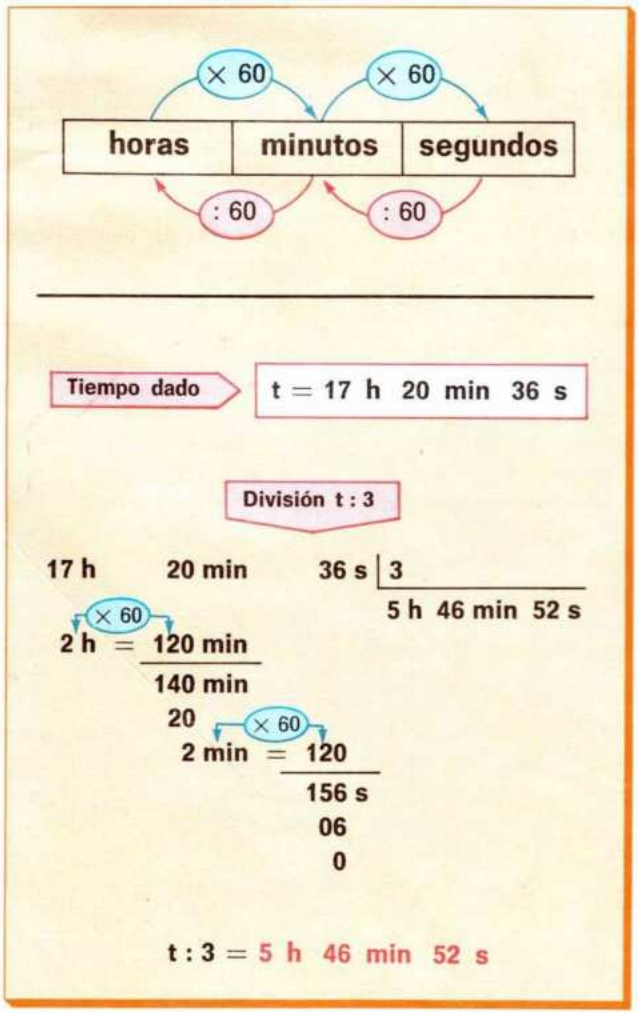
1. Dado $\hat{a} = 25°\ 13'\ 42''$, calcula:

a) $4 \times \hat{a}$ b) $10 \times \hat{a}$ c) $\hat{a} : 5$ d) $7 \times \hat{a}$

2. Sabiendo que $\hat{b} = 125°\ 55'\ 30''$, $\hat{c} = 226°\ 40'\ 36''$ y $\hat{d} = 30°\ 30'\ 30''$, calcula:

a) $\dfrac{\hat{b}}{5}$ b) $\dfrac{\hat{c}}{6}$ c) $\dfrac{\hat{d}}{5}$ d) $\dfrac{2}{3} \cdot \hat{b}$ e) $\dfrac{2}{3} \cdot \hat{d}$

5. Operaciones con medidas de tiempo



Sistema sexagesimal: horas, minutos y segundos.

Las horas, los minutos y los segundos forman un sistema sexagesimal de medidas, como los grados, los minutos y los segundos.

Por esta razón, la conversión de unas unidades en otras, el paso de complejo a incomplejo de tiempo y viceversa, se hace del mismo modo que con las medidas de ángulos. Veamos el ejemplo siguiente:

Vamos a dividir 17 h, 20 min, 36 s entre 3.

Para ello, se van dividiendo sucesivamente por 3 las horas, los minutos y los segundos. Como en el caso de los ángulos, los restos de las divisiones se convierten en unidades inferiores.

- División de las horas:

17 h | 3
2 h 5 h → 2 h = (2 × 60) min = 120 min

120 min + 20 min = 140 min

- División de los minutos:

140 min | 3
20 46 min → 2 min = (2 × 60) s = 120 s
2 min

120 s + 36 s = 156 s

- División de los segundos:

156 s | 3
06 52 s
0

Observa cómo se disponen las divisiones en la práctica.

1. Convierte en segundos:

a) 18 min b) 3 h 20 min c) 4 h 3 min d) 1 día e) 1 día 3 h 4 min

2. Expresa en horas, minutos y segundos:

a) 86.400 s b) 73.500 s c) 7.324 s d) 45.327 s

3. Resuelve estos problemas:

A. Un niño tarda en realizar un dibujo 2 h 30′ y un padre tarda en hacerlo la mitad de tiempo.
¿Cuánto tiempo invierte el padre?

B. Una bomba de agua llena en 1 hora $\frac{5}{13}$ de un depósito.
¿Cuánto tiempo tardará en llenar dicho depósito?

Hay que dividir $1 : \frac{5}{13} = \frac{13}{5}$; 13 h | 5
3 h 2 h

Continúa la división transformando las 3 h del resto en minutos.

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Expresa en segundos:

a) 5° b) 78′ c) 43° 10′ d) 7° 3′ 42″ e) 3° 3′ 3″

2. Expresa en grados, minutos y segundos:

a) 38.327″ b) 54.728″ c) 43.956″ d) 100.000″

3. Dados los ángulos $\hat{a} = 128° 42' 36''$ y $\hat{b} = 132° 26' 33''$, halla:

① $\hat{a} + \hat{b}$ ② $\hat{b} - \hat{a}$ ③ $3 \cdot \hat{a}$ ④ $5 \cdot \hat{b}$ ⑤ $\frac{\hat{a}}{2}$ ⑥ $\frac{\hat{b}}{3}$ ⑦ $\frac{\hat{a}}{2} + \frac{\hat{b}}{3}$ ⑧ $2 \cdot \hat{a} + 3 \cdot \hat{b}$ ⑨ $\hat{a} + 2 \cdot \hat{b}$ ⑩ $2 \cdot \hat{a} - \hat{b}$

4. Realiza las siguientes operaciones:

a) $52° 30' 42'' + 48° 43' 50''$

b) $54° 30' - 32° 40' 34''$

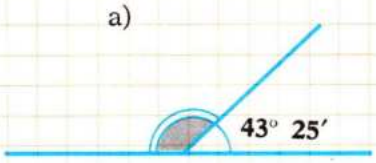
c) $10° 41' 24'' \times 4$

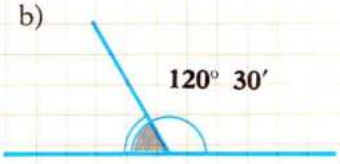
d) $70° 25' 10'' - 30° 42' 32''$

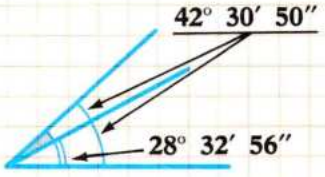
e) $5° 32' 40'' \times 6$

f) $54° 33' 45'' : 3$

5. Halla el ángulo coloreado en cada caso:

a) 

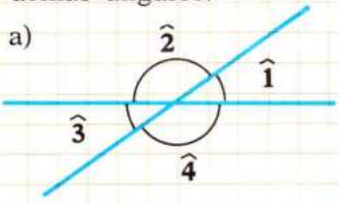
b) 

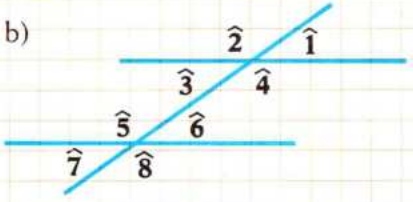
c) 

6. Halla el ángulo complementario y el suplementario de:

a) 38° 36′ 43″ b) 25° 38′ 40″ c) 35° 35′ 35″ d) 28° 46′ 30″

7. Sabiendo que el ángulo $\hat{1}$ vale en cada figura 35° 40′ 32″, halla en cada caso el valor de los demás ángulos.

a) 

b) 

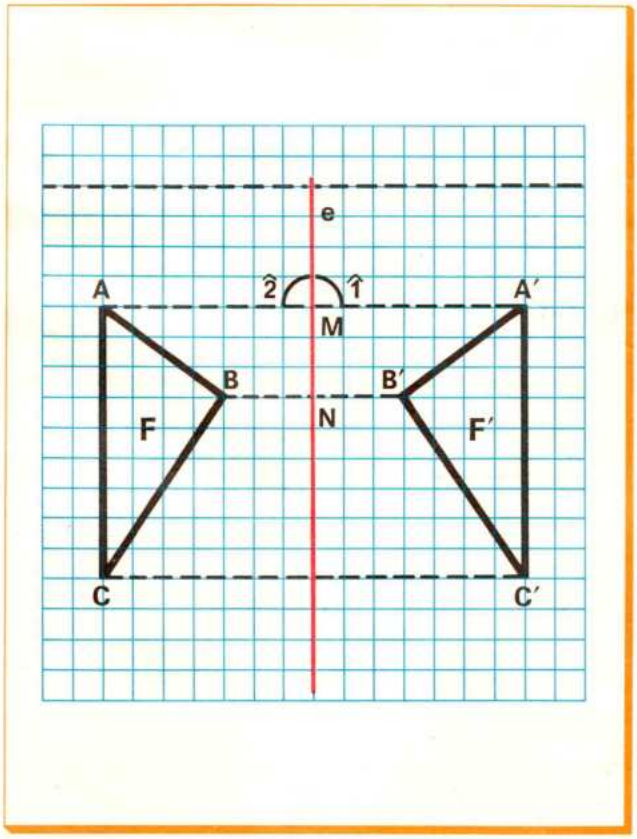
8. Halla la tercera parte del complemento de $\hat{a} = 36° 30' 42''$.

9. Halla la quinta parte del suplemento de $\hat{b} = 25° 32' 43''$.

10. Calcula $\frac{2}{3}$ de $27° 36' 15''$ y $\frac{2}{5}$ de $30° 25' 15''$.

11. Los $\frac{2}{3}$ de un ángulo $\hat{a}$ es $15° 30' 20''$. ¿Cuánto mide el ángulo $\hat{a}$?

1. Simetría respecto de un eje. Ejes de simetría de una figura



Simetría respecto de un eje.

Si se dibuja con lápiz blando una figura **F**, por ejemplo el triángulo **ABC**, y se dobla el papel por la recta **e**, al presionar por el borde de la figura y desdoblar se obtiene otra figura **F'**, que se llama simétrica de la figura **F** respecto de la recta **e** (pliegue).

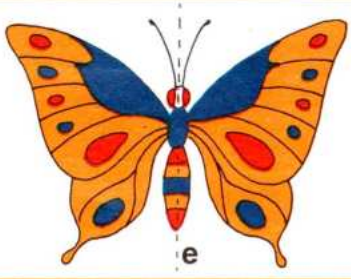
Esa recta se llama **eje de simetría.**

Al doblar el papel por el eje **e**, los puntos **A**, **B** y **C** se aplican sobre los puntos **A'**, **B'** y **C'**, respectivamente, que se llaman puntos simétricos de **A**, **B** y **C**.

Algunas propiedades de la simetría

Al doblar el papel por el eje se observan varias cosas:

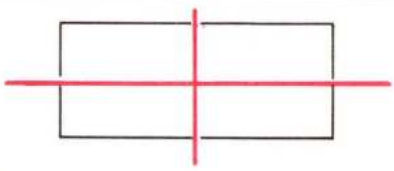
- Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$ coinciden: $\hat{1} = \hat{2}$. Por esta razón, los puntos simétricos están en rectas perpendiculares al eje.
- Los segmentos $\overline{MA}$ y $\overline{MA'}$ coinciden: $\overline{MA} = \overline{MA'}$. Esto significa que los puntos simétricos equidistan del eje de simetría.
- Los puntos del eje, como **M** y **N**, se transforman en ellos mismos, es decir, los puntos simétricos de los puntos del eje son ellos mismos.
- Los triángulos **ABC** y **A'B'C'** coinciden, luego la simetría conserva las distancias.



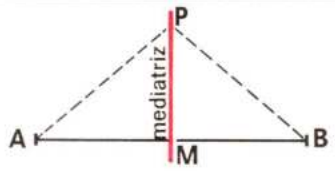
Eje de simetría de una figura.

Una recta **e** se llama eje de simetría de una figura **F** si al aplicar la simetría de eje **e**, la figura simétrica de **F** es ella misma.

Observa ejes de simetría de rectángulos, segmentos y ángulos.

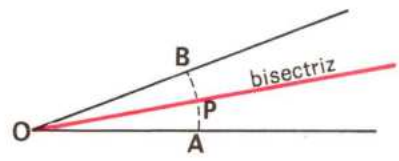


El rectangulo tiene **dos ejes de simetría.**



Un segmento tiene **un eje de simetría** que es su mediatriz.

Los puntos de la mediatriz de un segmento están a igual distancia de los extremos: $\overline{PA} = \overline{PB}$.

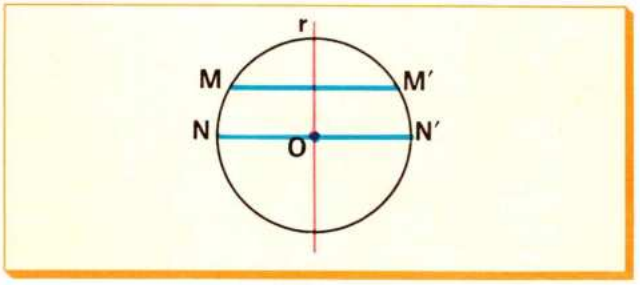


Un ángulo tiene **un eje de simetría** que es su bisectriz.

Los puntos de la bisectriz de un ángulo están a igual distancia de los lados del ángulo.

2. Simetrías en la circunferencia

Los diámetros como ejes de simetría en la circunferencia.

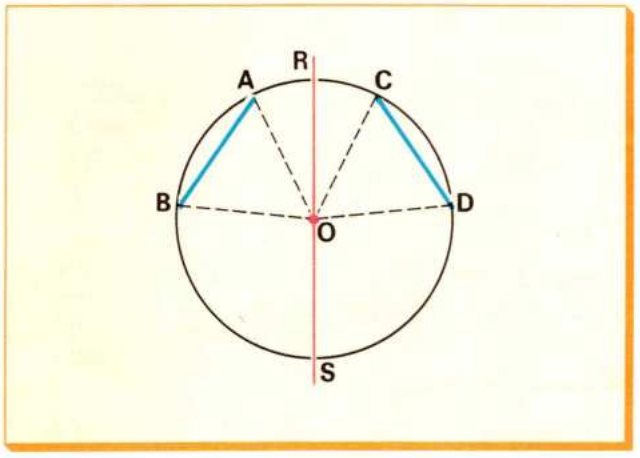


Dibuja una circunferencia como la de la figura y una recta **r** que pase por el centro **O** y después señala en la circunferencia los puntos **M** y **N**.

Dobla la figura por la recta **r** y observarás que los puntos simétricos **M'** y **N'**, de **M** y **N**, respectivamente, están en la circunferencia. Esto significa que el punto simétrico de cualquier punto de la circunferencia está en dicha circunferencia.

Los diámetros de una circunferencia son ejes de simetría de la misma.

Relación entre cuerdas iguales y sus arcos correspondientes.



En la circunferencia de centro **O** se han trazado dos cuerdas iguales: $\overline{AB} = \overline{CD}$.

El ángulo $\widehat{AOB}$ se llama ángulo central correspondiente a la cuerda $\overline{AB}$.

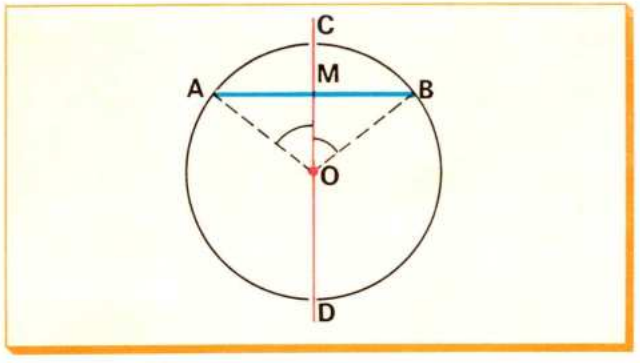
Del mismo modo, el ángulo $\widehat{COD}$ es el ángulo central correspondiente a la cuerda $\overline{CD}$.

Si tomamos como eje de simetría el diámetro **RS**, tal que **A** y **C** sean simétricos, al doblar la figura por dicho diámetro resulta que:

- El arco $\overset{\frown}{AB}$ coincide con el arco $\overset{\frown}{CD} \longrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.
- El ángulo central $\widehat{AOB}$ coincide con el ángulo central $\widehat{COD} \longrightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD}$.

Si en una circunferencia o en circunferencias iguales hay dos cuerdas iguales, los arcos y ángulos centrales correspondientes también son iguales.

Diámetro perpendicular a una cuerda.



Traza en un papel una circunferencia como la de la figura, y en ella una cuerda $\overline{AB}$.

Traza el diámetro perpendicular a la cuerda $\overline{AB}$.

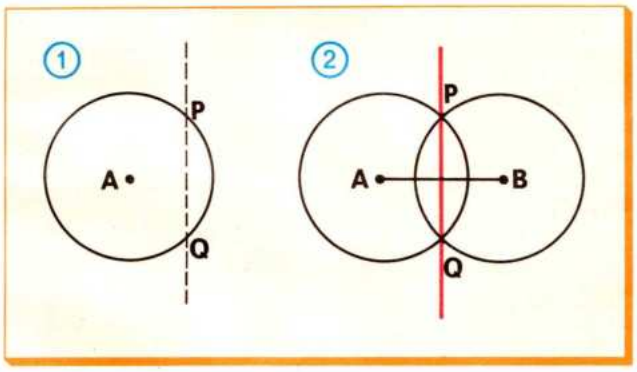
Como el diámetro es eje de simetría, al doblar por él resulta que:

- Los segmentos $\overline{MA}$ y $\overline{MB}$ coinciden.
- Los ángulos $\widehat{MOA}$ y $\widehat{MOB}$ también coinciden.

Por lo tanto, dicho diámetro es mediatriz de la cuerda $\overline{AB}$ y bisectriz del ángulo central correspondiente.

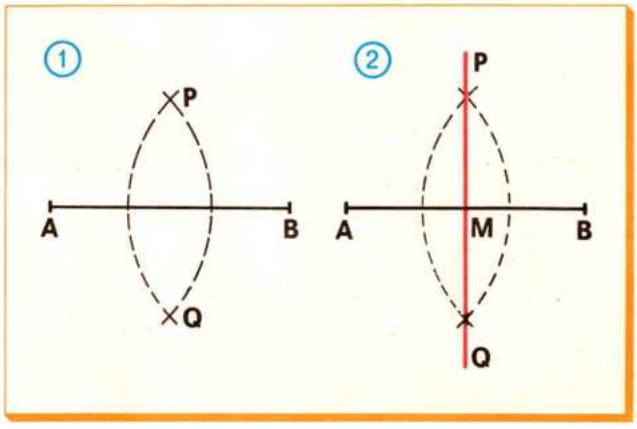
El diámetro perpendicular a una cuerda es mediatriz de la cuerda y bisectriz del ángulo correspondiente.

Justificación de la construcción de la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ con regla y compás.



1. Dibuja en un papel una circunferencia de centro **A** y señala en ella dos puntos **P** y **Q**.
2. Dobla el papel por la recta **PQ** y calca la circunferencia. Observa que obtenemos otra circunferencia de centro **B**. Las dos circunferencias son simétricas respecto de la recta **PQ**, y como el punto **A** coincide con el punto **B** al doblar por la recta **PQ**, resulta que esta recta es también eje de simetría del segmento $\overline{AB}$, es decir, la recta **PQ** es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

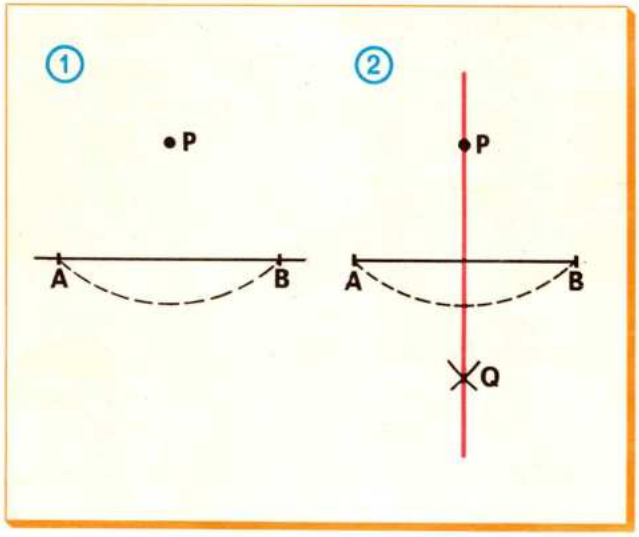
Construcción de la mediatriz de un segmento con regla y compás.



1. Para hallar la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$, según lo dicho en el párrafo anterior, bastará con trazar dos circunferencias, o mejor arcos de circunferencia, de centros los puntos **A** y **B** de igual radio y que se corten.
2. Se traza la recta que une los puntos de intersección **P** y **Q**, que es la mediatriz.

   A la vez queda determinado el punto medio **M** del segmento dado $\overline{AB}$.

Construcción con regla y compás de la perpendicular a una recta r desde un punto P exterior a ella.

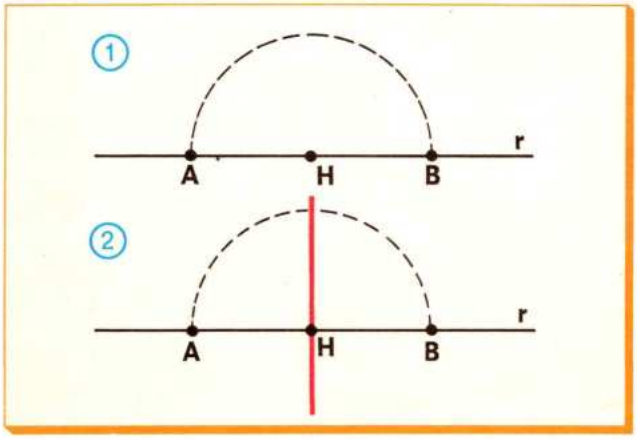


Ya se ha visto cómo se realiza esta construcción utilizando regla y escuadra (ver tema 15). En ocasiones, cuando hay que hacer esta construcción en el terreno se necesita utilizar cuerdas tirantes que hacen la función del compás.

1. Con centro en el punto **P** y con un radio suficiente, se traza un arco de circunferencia que corte a la recta dada en dos puntos **A** y **B** a igual distancia de **P**.
2. Se traza la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ como en el caso anterior, para lo cual basta construir el punto **Q**, ya que el punto **P** pertenece a la mediatriz.

4. Construcciones fundamentales con regla y compás. II

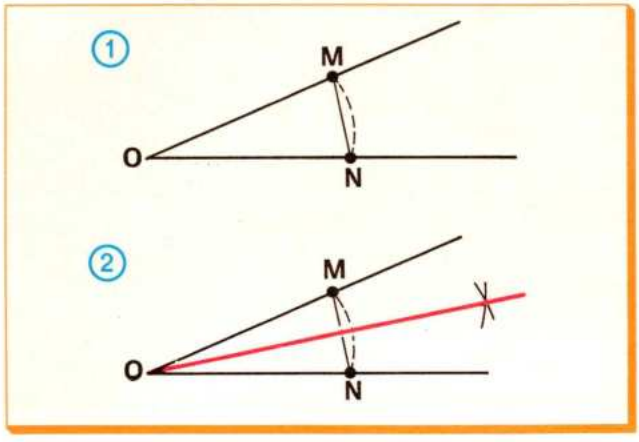
Construcción con regla y compás de la perpendicular a una recta r por un punto H de dicha recta.



1. Con centro en el punto **H** se traza una semicircunferencia que corte la recta **r** en dos puntos **A** y **B**.
2. Se continúa, como en el caso anterior, trazando la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Observa que desde un punto (ya sea exterior a la recta **r** o perteneciente a ella) sólo se puede trazar una perpendicular a ella.

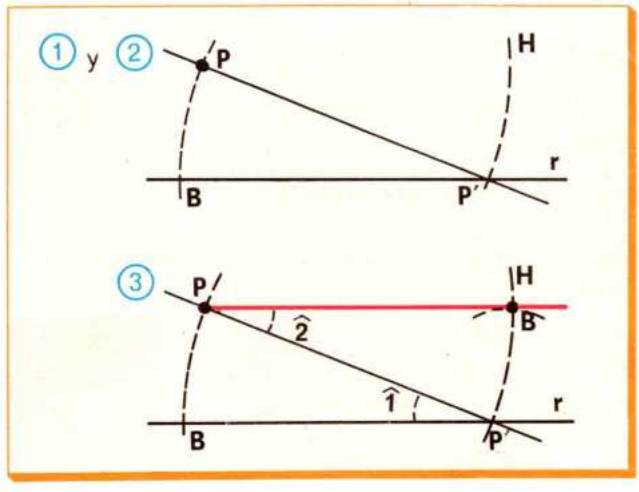
Construcción de la bisectriz de un ángulo.



La construcción de la mediatriz de un segmento se puede aplicar para la construcción de la bisectriz de un ángulo $\hat{a}$.

1. Con centro en el vértice **O** trazamos un arco $\overset{\frown}{MN}$, con lo cual los puntos **M** y **N** distan igual del vértice **O**.
2. La mediatriz de la cuerda $\overline{MN}$ pasará por el punto **O**, por ser el diámetro perpendicular a la cuerda $\overline{MN}$, y por lo tanto será la bisectriz del ángulo dado.

Construcción de la paralela a una recta r desde un punto exterior P.



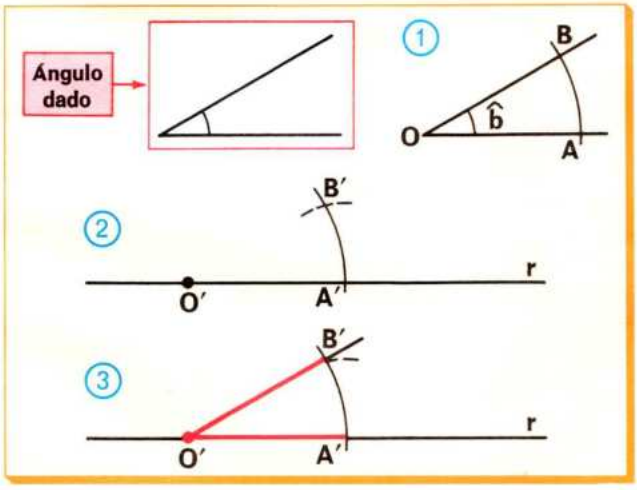
Ya se vio en el tema 15, pág. 122, cómo se hacía esta construcción con regla y escuadra. Veamos cómo se realiza con ayuda del compás.

1. Dados la recta **r** y el punto **P**, se traza desde **P** una secante cualquiera **PP'**. Ahora se trata de construir otra recta que forme con **PP'** ángulos alternos internos iguales.
2. Con centro en **P'** y radio **PP'**, se traza un arco $\overset{\frown}{PB}$, y con centro en **P** y radio **PP'**, se traza el arco $\overset{\frown}{P'H}$.
3. Con centro en **P'** y con un radio igual a la distancia $\overline{PB}$, se traza un arco que nos determina el punto **B'**.

   Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$ son iguales, y la recta **PB'** es paralela a la recta **r**.

5. Construcciones fundamentales con regla y compás. III

Construcción de un ángulo igual a otro dado.

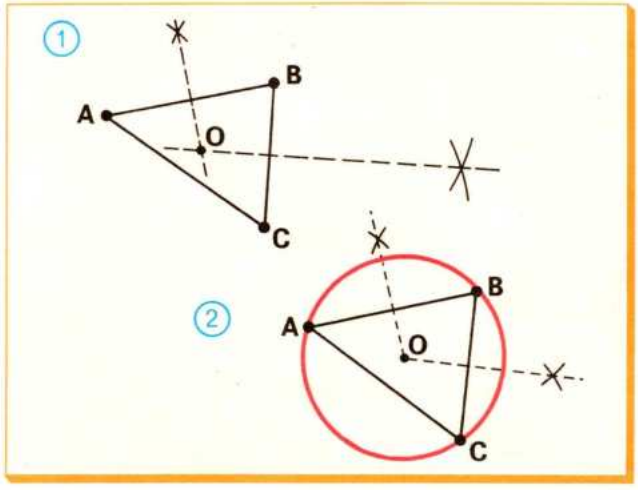


Dado el ángulo $\hat{b}$, veamos cómo se construye otro ángulo igual que tenga uno de sus lados sobre una recta **r**.

1. Con centro en el vértice **O** del ángulo dado se traza un arco $\overset{\frown}{AB}$.
2. Con centro en un punto cualquiera **O′** de la recta **r** y radio igual a **OA** = **O′A′** se traza un arco.

   Tomando con el compás la distancia $\overline{AB}$ y con centro en **A′** se traza otro arco que nos dará el punto **B′**.
3. Uniendo **B′** con **O′** se obtiene el ángulo $\overset{\frown}{A'O'B'}$, que es igual al ángulo dado $\overset{\frown}{AOB}$, ya que $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son iguales.

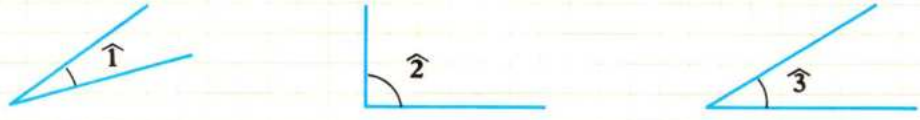
Construcción de la circunferencia que pasa por tres puntos no alineados.



Para construir la circunferencia que pasa por tres puntos no alineados **A**, **B** y **C** se procede así:

1. Se unen los puntos **A**, **B** y **C** mediante segmentos y se trazan las mediatrices de dos de ellos.
2. El punto **O**, donde se cortan las dos mediatrices, es el centro de la circunferencia que pasa por **A**, **B** y **C**.

1. Dibuja en tu cuaderno ángulos iguales a los siguientes:



2. Recorta y pliega:

A. Traza un segmento $\overline{AB}$. Dobla el papel de modo que el punto **A** coincida con **B**. Desdobla el papel y traza la mediatriz que ha quedado marcada.

B. Recorta un cuarto de folio y señala tres puntos **A**, **B** y **C** no alineados y bastante separados. Une los puntos **A**, **B** y **C** mediante segmentos. Dobla el papel de modo que **A** coincida con **B**. Dobla después el papel de modo que **B** coincida con **C**. Señala el punto **O** donde se cortan los dos pliegues y traza la circunferencia de radio **OA**.

¿Por qué puntos pasa la circunferencia?

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

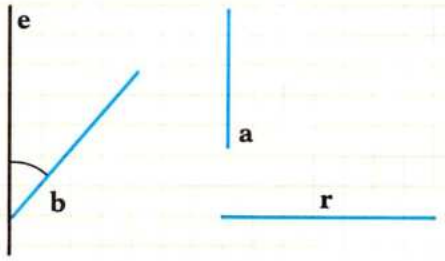
1. En la simetría respecto de un eje **e**.

Haz el dibujo correspondiente y averigua:

a) ¿Cuál es la recta simétrica de una recta **r** perpendicular al eje **e**?

b) ¿Cuál es la recta **a'** simétrica de una recta **a** paralela al eje **e**?

c) ¿Cuál es la recta simétrica **b'** de una recta **b** que corta al eje **e**? Comprueba que el eje es bisectriz del ángulo que forman **b** y **b'**.



2. Dibuja un cuadrado y traza sus cuatro ejes de simetría. Dibuja un rombo y traza sus dos ejes de simetría.

3. Traza un segmento $\overline{AB}$. Dobla el papel de modo que **A** coincida con **B**. Desdobla el papel y traza la mediatriz que ha quedado marcada. Señala un punto de la mediatriz y comprueba mediante doblez que dicho punto equidista de los lados del ángulo. Construye también con regla y compás la mediatriz de un segmento.

4. Dibuja un ángulo $\widehat{AOB}$ y marca su bisectriz doblando el papel de modo que el lado **OB** coincida con el lado **OA**. Construye la bisectriz de un ángulo con regla y compás.

5. Dibuja una circunferencia. Señala en ella una cuerda, su arco y su ángulo central correspondiente. Traza, doblando, la mediatriz de la cuerda.

¿Pasa el doblez por el centro de la circunferencia?

6. ¿Qué propiedad tiene cada punto de la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$?

7. Dibuja dos segmentos concatenados $\overline{MN}$ y $\overline{NP}$. Traza la mediatriz del segmento $\overline{MN}$ y después la mediatriz del segmento $\overline{NP}$. ¿Se cortan estas mediatrices?

Traza la circunferencia que tiene por centro el punto **O** de intersección de las mediatrices y de radio $\overline{OM}$. ¿Por qué puntos pasa esta circunferencia?

8. Traza dos segmentos consecutivos $\overline{MN}$ y $\overline{NP}$. Traza las mediatrices de $\overline{MN}$ y de $\overline{NP}$.

¿Cómo son estas mediatrices?

9. Traza una recta **r** y después traza una paralela a **r** desde un punto **P** exterior a dicha recta.

¿Cuántas paralelas a **r** se pueden trazar que pasen por el punto **P**?

10. Dibuja tres puntos **A**, **B** y **C** alineados. Traza las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

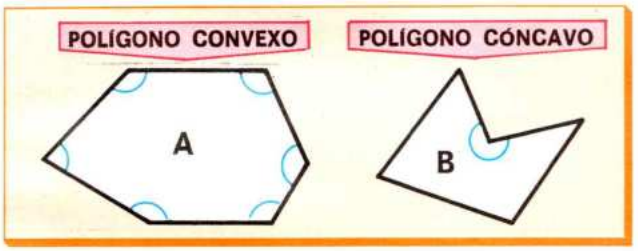
¿Se cortan estas mediatrices? ¿Se puede trazar una circunferencia que pase por tres puntos alineados?

11. Si un diámetro es perpendicular a una cuerda en una circunferencia ¿qué puedes decir de la cuerda y de su arco correspondiente?

TEMA 21 POLÍGONOS. TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS.

1. Polígonos cóncavos y polígonos convexos. Diagonales

Polígono convexo y polígono cóncavo.



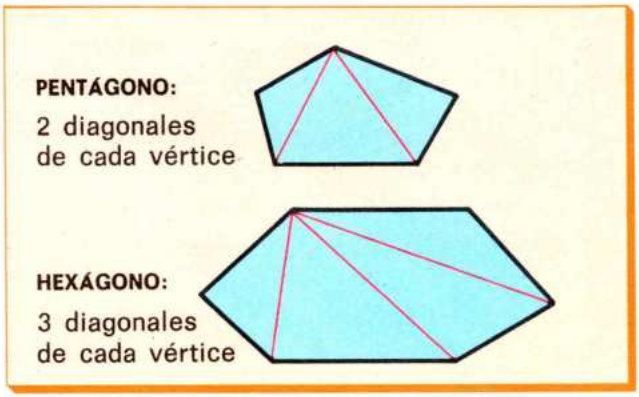
Polígono es la porción de plano limitada por una línea poligonal cerrada.

El polígono **A** tiene todos sus ángulos convexos, es decir, menores que 180°.

El polígono **B** tiene un ángulo cóncavo, es decir, mayor que 180°.

Un polígono es convexo si tiene todos sus ángulos convexos.
Un polígono es cóncavo si tiene algún ángulo cóncavo.

¿Cuántas diagonales salen de un vértice de un polígono convexo?



Diagonal de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos.

Observa el número de diagonales que parten de cada vértice en el pentágono y en el hexágono.

- En el pentágono, de cada vértice parten dos diagonales, es decir, tantas como lados tiene el polígono menos 3:

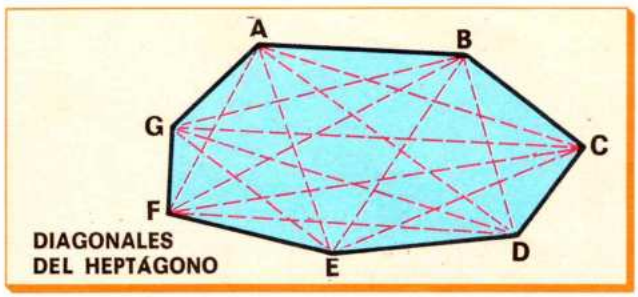
$$2 = 5 - 3$$

- En el hexágono, de cada vértice salen tres diagonales, es decir, tantas como lados tiene el polígono menos 3:

$$3 = 6 - 3$$

En todos los polígonos convexos ocurre que de cada vértice salen tantas diagonales como lados tiene el polígono menos tres.

¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo?



En el heptágono, de cada vértice parten cuatro diagonales; de los siete vértices partirán $7 \times 4 = 28$ diagonales. Ahora bien, cada diagonal está contada aquí dos veces.

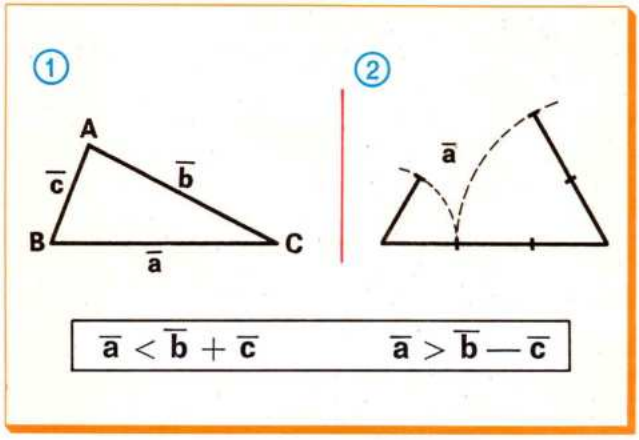
Así la diagonal **AC** está contada como diagonal que parte de **A** y como diagonal que parte de **C**; por eso, para hallar el número total de diagonales hay que dividir 28 entre 2:

Núm. de diagonales del hectágono $= \frac{7 \times (7-3)}{2} = \frac{28}{2} =$ **14 diagonales**

El número de diagonales de un polígono convexo de n lados se obtiene multiplicando n por $(n - 3)$ y dividiendo el resultado por 2, es decir, mediante la fórmula $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$

2. El triángulo. Relaciones entre sus lados y relaciones entre sus ángulos

Relaciones entre los lados.



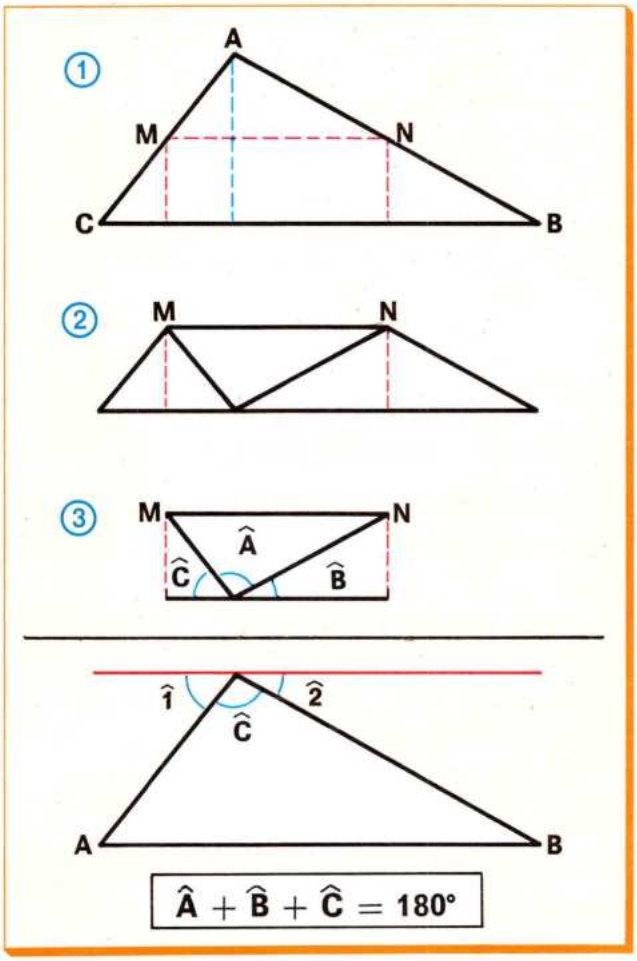
Considera el triángulo **ABC** ①. La distancia entre los puntos **C** y **B** es el segmento que los une, es decir, el lado $\bar{a}$. Por eso para ir de **C** a **B**, el camino pasando por **A**, que es $\bar{b} + \bar{c}$, es mayor que $\bar{a}$, es decir, $\bar{b} + \bar{c} > \bar{a}$, o bien, $\bar{a} < \bar{b} + \bar{c}$.

Midiendo los lados se comprueba que el lado menor $\bar{c}$ es mayor que la diferencia de los otros dos lados, es decir, $\bar{c} > \bar{a} - \bar{b}$.

Observa en la figura ② que con tres segmentos de 3 cm, 2 cm y 1 cm no se pueden formar triángulos, porque **3 cm = 2 cm + 1 cm.**

Un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Suma de los ángulos de un triángulo.



① Dibuja en un papel transparente un triángulo como el triángulo **ABC**. El punto **M** es el punto medio de **AC** y lo puedes encontrar doblando el papel por el lado **AC** de modo que el punto **A** coincida con el punto **C**.

Del mismo modo puedes hallar el punto **N**, que es el punto medio del lado **AB**.

② Dobla el papel por el segmento $\overline{MN}$.

③ Dobla por las líneas de puntos que parten de **M** y de **N**.

Observa que los tres ángulos del triángulo, $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$, forman un ángulo llano.

Esta experiencia demuestra una propiedad del triángulo, que su suma es igual a un ángulo llano:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°.$$

• Veamos de otro modo esta propiedad.

Tracemos por uno de los vértices, por ejemplo el vértice **C**, la paralela al lado opuesto **AB**.

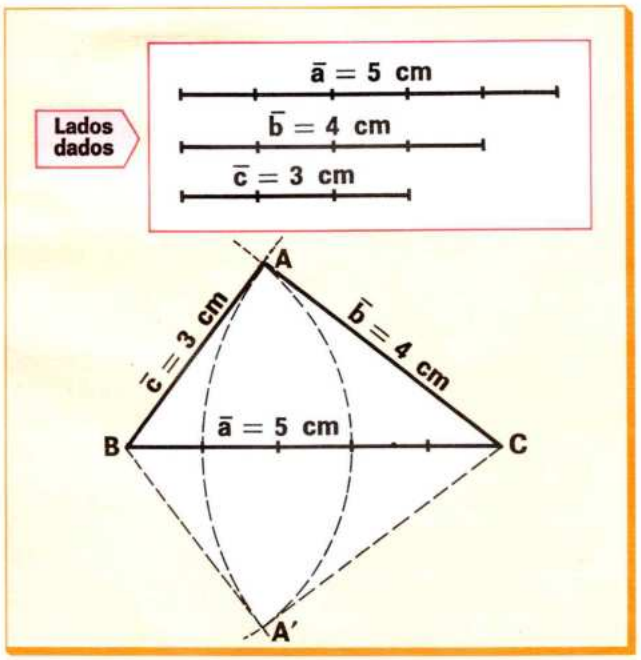
Se forman así tres ángulos, $\hat{1}$, $\hat{2}$ y $\hat{C}$, tales que $\hat{1} + \hat{2} + \hat{C} = 180°$.

Pero $\left.\begin{matrix}\hat{1} = \hat{A} \\ \hat{2} = \hat{B}\end{matrix}\right\}$ por ser alternos internos entre paralelas.

Por tanto, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

La suma de los tres ángulos de un triángulo es un ángulo llano o 180°.

3. Construcción de triángulos. I



PRIMER CASO

Construir un triángulo conociendo los tres lados.

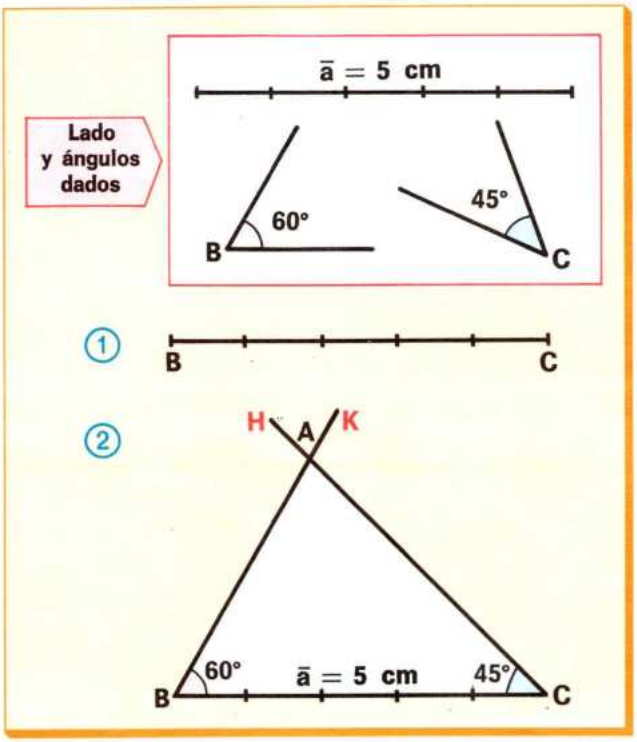
Supongamos que los lados son $\bar{a} = 5$ cm, $\bar{b} = 4$ cm y $\bar{c} = 3$ cm.

Para construir el triángulo se procede así:

- Se traza un segmento igual al lado $\bar{a} = 5$ cm.
- Se traza un arco de circunferencia de radio $\mathbf{c} = 3$ cm y centro en **B** y otro arco de radio $\bar{b} = 4$ cm y centro en el punto **C.**

Estos dos arcos se cortan en los puntos **A** y **A'.** Por eso se pueden construir dos triángulos iguales con los lados dados.

Cada uno de los dos triángulos resuelve el problema.



SEGUNDO CASO

Construir un triángulo conociendo un lado y los dos ángulos contiguos.

Sea un triángulo en el que se conoce el lado $\bar{a} = 5$ cm y los ángulos $\hat{B} = 60°$ y $\hat{C} = 45°$.

Se procede del modo siguiente:

(1) Se toma el segmento $\bar{a}$ de 5 cm y así se tienen los vértices **B** y **C**.

(2) Se construyen los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ con vértices en **B** y en **C**, respectivamente, de modo que el segmento $\bar{a}$ sea uno de los lados y que los dos ángulos queden al mismo lado del segmento $\bar{a}$.

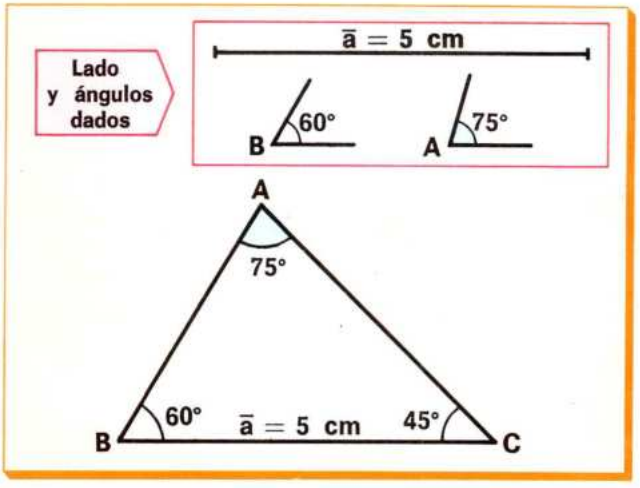
Las dos semirrectas **BK** y **CH** se cortan en el punto **A**, que es el tercer vértice del triángulo.

1. Construye un triángulo sabiendo que sus lados son $\bar{a} = 6$ cm, $\bar{b} = 4$ cm, $\bar{c} = 3$ cm.

2. Construye un triángulo equilátero de lado 6 cm.

3. Construye un triángulo equilátero de lado 8 cm.

4. Construcción de triángulos. II. Criterios de igualdad



TERCER CASO

Construir un triángulo conociendo un lado y dos ángulos no contiguos.

Sea un triángulo en el que se conoce $\bar{a} = 5$ cm, $\hat{B} = 60°$ y $\hat{A} = 75°$.

En primer lugar se calcula el tercer ángulo del triángulo.

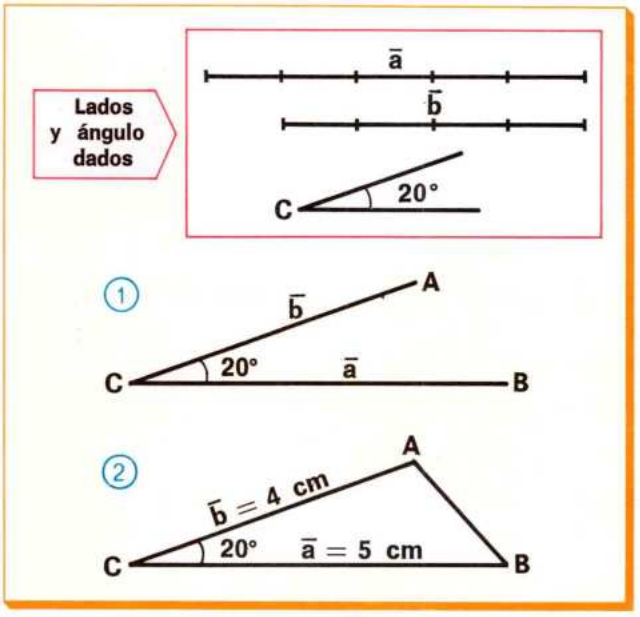
Como entre los tres ángulos suman 180°:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

$$75 + 60 + \hat{C} = 180° \rightarrow 135° + \hat{C} = 180°$$

$$\hat{C} = 180° - 135° = 45°$$

Así se sabe que el tercer ángulo es $\hat{C} = 45°$. Con lo cual conocemos un lado **a** y los ángulos contiguos, y para construir el triángulo se procede como en el caso anterior.



CUARTO CASO

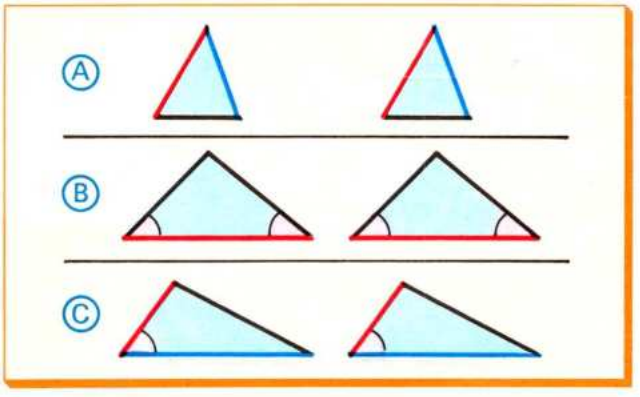
Construcción de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

Sea un triángulo en el que se conoce $\bar{a} = 5$ cm, $\bar{b} = 4$ cm y $\hat{C} = 20°$.

Para construir el triángulo se procede del modo siguiente:

① Se dibuja un ángulo igual al $\hat{C}$ y sobre uno de los lados del ángulo y con extremo en **C** se lleva un segmento igual al $\bar{a}$ y sobre el otro lado un segmento igual al $\bar{b}$, con lo que resultan los vértices **A** y **B**.

② Se unen los extremos **A** y **B** y queda construido el triángulo.



Criterios de igualdad de triángulos.

Para comprobar si dos triángulos son iguales no es necesario averiguar que tienen sus tres lados y sus tres ángulos iguales; basta con conocer la igualdad de algunos de sus elementos. Estas condiciones son los **criterios de igualdad.**

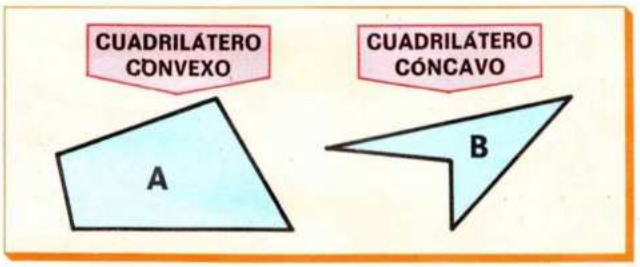
Ⓐ Dos triángulos son iguales si tienen los tres lados iguales uno a uno.

Ⓑ Dos triángulos son iguales si tienen iguales un lado y dos ángulos.

Ⓒ Dos triángulos son iguales si tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

5. Cuadriláteros

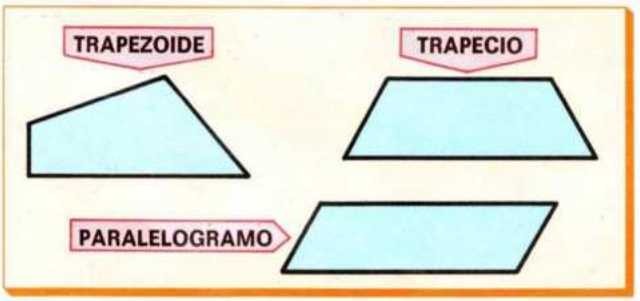
Cuadriláteros.



Cuadriláteros son los polígonos que tienen cuatro lados. El cuadrilátero **A**, que tiene todos sus ángulos convexos, o sea menores que 180°, es un **cuadrilátero convexo.**

El cuadrilátero **B**, que tiene un ángulo cóncavo, o sea mayor que 180°, es un **cuadrilátero cóncavo.**

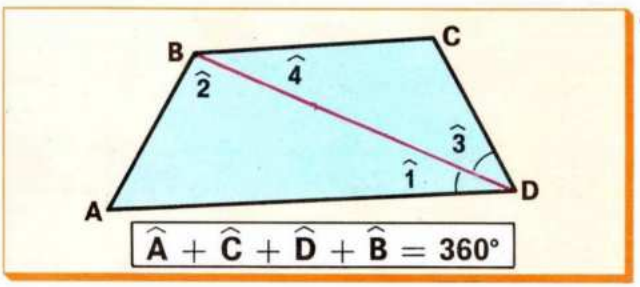
Clasificación de los cuadriláteros.



Los cuadriláteros convexos se clasifican en **trapezoides, trapecios** y **paralelogramos.**

- **Trapezoides** son los cuadriláteros que no tienen lados paralelos.
- **Trapecios** son los cuadriláteros que sólo tienen dos lados paralelos.
- **Paralelogramos** son los cuadriláteros que tienen los cuatro lados paralelos dos a dos.

Suma de los ángulos de un cuadrilátero.



Observa el cuadrilátero **ABCD**.

Al trazar una de las diagonales, por ejemplo la diagonal $\overline{BD}$, el cuadrilátero queda descompuesto en dos triángulos.

Como cada triángulo tiene 180°, resulta que los ángulos del cuadrilátero **ABCD** miden $180° \times 2 = 360°$.

Es decir, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$.

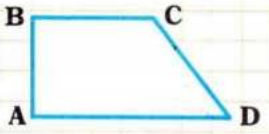
La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360° o cuatro ángulos rectos.

1. Dibuja un cuadrilátero cóncavo, un trapezoide, un trapecio y un paralelogramo.

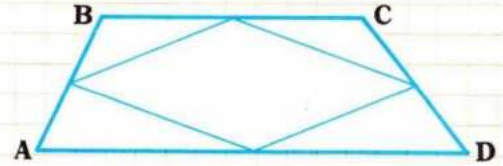
2. En un cuadrilátero ABCD, A = 90°, B = 80°, C = 70°. ¿Cuánto mide el ángulo $\hat{D}$?

3. ¿Cuántas diagonales tiene un cuadrilátero?

4. El trapecio ABCD tiene dos ángulos rectos (A = B = 90°).
Si **D** = 50° 50′ ¿cuánto mide el ángulo $\hat{C}$?

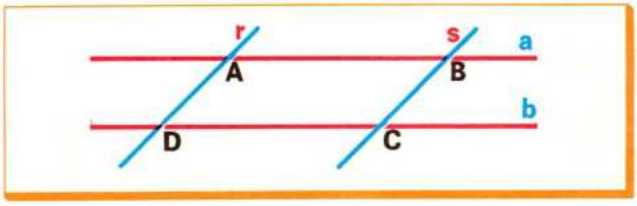


5. Dibuja en un papel un trapezoide ABCD.
Señala los puntos medios y únelos.
Recorta el trapezoide y el cuadrilátero que se forma.
¿Cómo es este cuadrilátero?



6. Lados opuestos de un paralelogramo

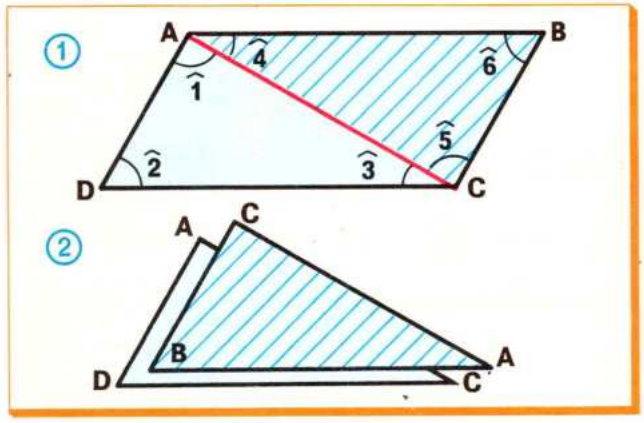
Segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas.



En la figura se han trazado dos rectas paralelas **a**//**b** y otras dos rectas paralelas **r**//**s** que cortan a las anteriores. Comprueba con un compás o una regla que $\overline{AB} = \overline{DC}$ y que $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Los segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas son iguales.

Lados opuestos de un paralelogramo.



① Dibuja un paralelogramo **ABCD** en un folio y traza una diagonal, por ejemplo la diagonal $\overline{AC}$.

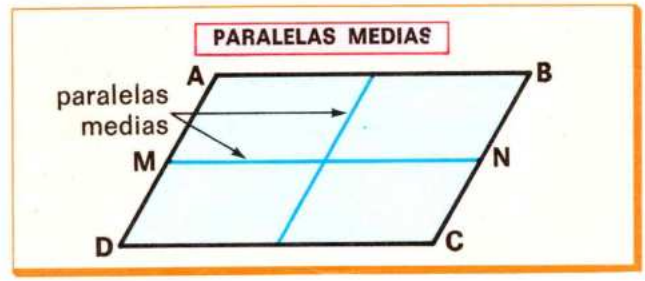
Recorta los dos triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ADC}$.

② Haz la superposición de los dos triángulos y comprueba que coinciden y que $\overline{AB} = \overline{DC}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$.

A este mismo resultado se puede llegar observando que los lados opuestos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas.

Cada diagonal divide a un paralelogramo en dos triángulos iguales.
Los lados opuestos de un paralelogramo tienen igual longitud.

Paralela media de un paralelogramo.



Observa que el segmento $\overline{MN}$ une los puntos medios de dos lados opuestos del paralelogramo **ABCD**.

Este segmento $\overline{MN}$ se llama **paralela media** del paralelogramo y descompone a éste en dos paralelogramos iguales.

Por eso $\overline{MN} = \overline{AB} = \overline{DC}$.

Un paralelogramo tiene dos paralelas medias.

Paralela media de un paralelogramo es un segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos.

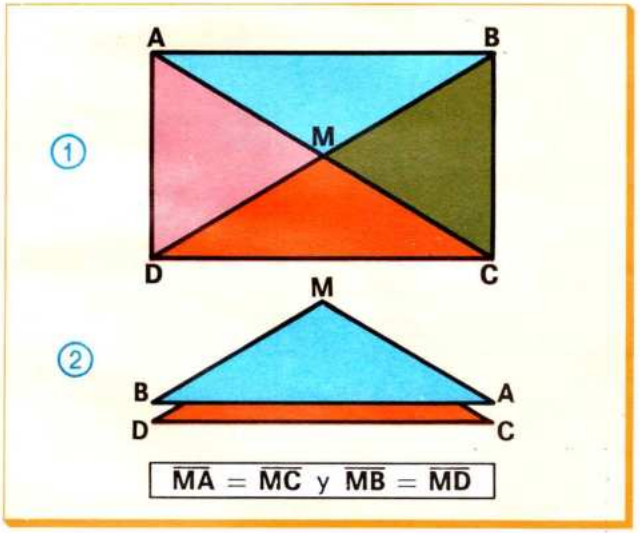
1. Dibuja, recorta y contesta:

Dibuja un paralelogramo y una diagonal. Recorta el paralelogramo por la diagonal.

- ¿Cómo son los dos triángulos que se forman?
- ¿Cómo son los lados opuestos de un paralelogramo?

7. Diagonales y ángulos de un paralelogramo

Diagonales de un paralelogramo.



① Dibuja un paralelogramo grande **ABCD** en una hoja de papel y traza sus dos diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Sea **M** el punto donde se cortan las diagonales.

Colorea los triángulos como en la figura.

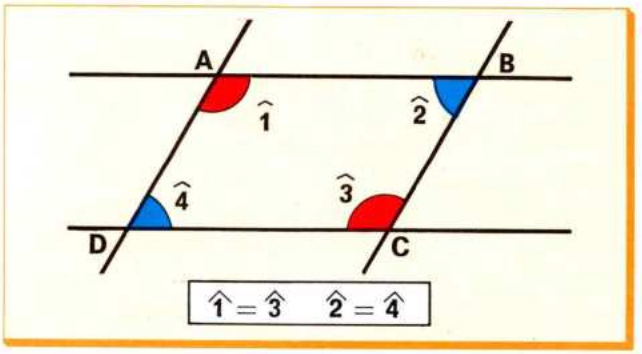
② Comprueba que los triángulos azul y marrón coinciden al superponerlos, es decir, son iguales, y que también son iguales los triángulos rojo y verde.

De este modo se comprueba que:

$$\overline{MA} = \overline{MC} \text{ y } \overline{MB} = \overline{MD}$$

Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio de ambas.

Ángulos de los paralelogramos.



Observa los ángulos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$ y $\hat{4}$ del paralelogramo **ABCD.**

Dos ángulos contiguos como el $\hat{1}$ y el $\hat{2}$ son suplementarios, por ser ángulos colaterales internos entre dos paralelas cortadas por una secante.

- Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$ son suplementarios: $\hat{1} + \hat{2} = 180°$.
- Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{4}$ son también suplementarios: $\hat{1} + \hat{4} = 180°$.

De aquí se deduce que $\hat{2} = \hat{4}$ y que $\hat{1} = \hat{3}$.

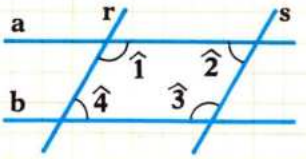
Los ángulos opuestos son iguales.

En un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales y los contiguos son suplementarios.

1. Traza, recorta y contesta:

A. Haz la actividad que se indica al principio de esta página.

Al coincidir los triángulos ⓐ y ⓓ ¿qué propiedad de las diagonales se comprueba?



B. ¿Cuánto vale $\hat{1} + \hat{4}$?

¿Cuánto suman los ángulos $\hat{2}$ y $\hat{3}$?

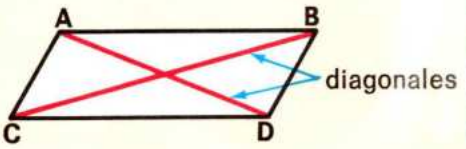
¿Cómo son los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{3}$? ¿Y los ángulos $\hat{2}$ y $\hat{4}$?

C. Dibuja un paralelogramo **ABCD.**

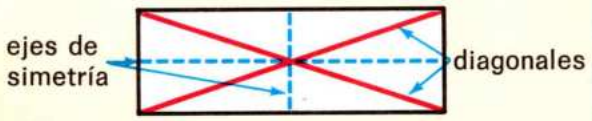
Si $\hat{D} = 60°$ ¿cuánto mide cada uno de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$?

8. Clasificación y simetría de los paralelogramos

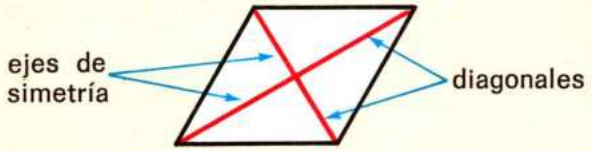
ROMBOIDE



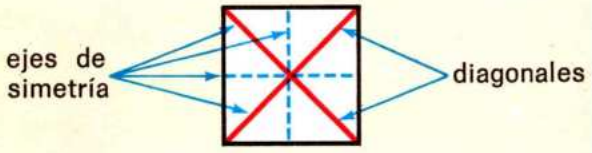
RECTÁNGULO



ROMBO



CUADRADO



Clasificación de los paralelogramos.

Los paralelogramos se clasifican en **romboides, rectángulos, rombos** y **cuadrados.**

- El **romboide** es el paralelogramo más general. Sus propiedades son:
  - — Que los lados opuestos son iguales.
  - — Que los ángulos opuestos son iguales y los contiguos son suplementarios.

  Estas propiedades son válidas para los otros tres paralelogramos, pero además cada uno de estos paralelogramos tienen otras propiedades características.

- El **rectángulo** es un paralelogramo que tiene los cuatro ángulos rectos y sus diagonales son iguales.

  Estas propiedades son características de los rectángulos.

  El rectángulo tiene dos ejes de simetría que coinciden con las paralelas medias.

- El **rombo** es un paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales. Las diagonales de un rombo son perpendiculares. Estas propiedades son características de los rombos.

  El rombo tiene dos ejes de simetría, que son las diagonales.

- El **cuadrado** es el paralelogramo que tiene los cuatro ángulos rectos y los cuatro lados iguales. El cuadrado es, por tanto, rectángulo y rombo a la vez.

  El cuadrado tiene cuatro ejes de simetría, que son las dos diagonales y las dos paralelas medias.

1. Traza y contesta:

A. Traza un paralelogramo romboide. Traza una paralela media y comprueba que esta paralela media no es eje de simetría del romboide.

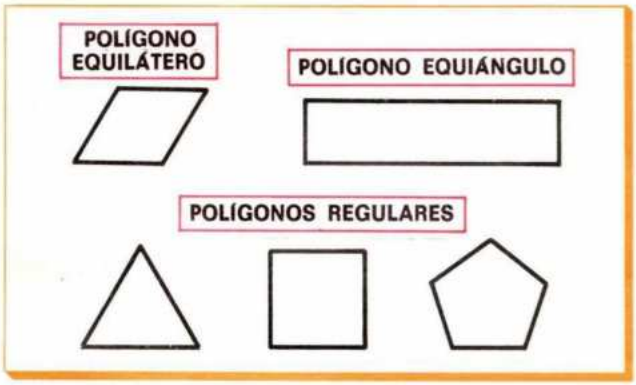
B. Dibuja un rectángulo y sus dos ejes de simetría. ¿Son las diagonales del rectángulo ejes de simetría del mismo? Traza las diagonales del rombo. ¿Cómo son entre sí? ¿Son ejes de simetría del rombo?

C. Dibuja un cuadrado y traza las diagonales y las paralelas medias. ¿Cómo son las diagonales entre sí? ¿Y las paralelas medias entre sí? ¿Cuáles son los ejes de simetría del cuadrado?

D. Di en qué se parecen y en qué se diferencian:

a) el rombo y el cuadrado;
b) el rectángulo y el cuadrado.

9. Construcción de polígonos regulares

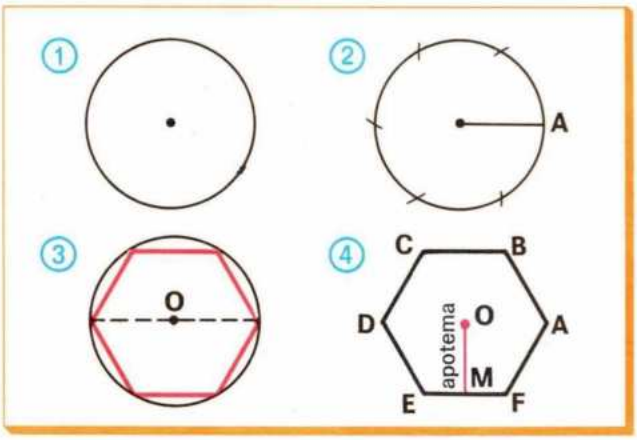


Polígonos regulares.

- Un polígono es **equilátero** cuando tiene todos sus lados iguales, por ejemplo el rombo.
- Un polígono es **equiángulo** cuando tiene todos sus ángulos iguales, por ejemplo el rectángulo.
- Un polígono es **regular** cuando es, a la vez, equilátero y equiángulo, por ejemplo el cuadrado, el triángulo equilátero, etc.

El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados.

Polígono regular es el polígono que tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales.



Construcción del hexágono regular.

1. Traza una circunferencia.
2. A partir de un punto, por ejemplo **A**, lleva sobre ella cuerdas iguales al radio.

   Comprueba que se pueden llevar exactamente seis cuerdas iguales al radio.
3. Así obtendrás el hexágono regular **ABCDEF**, que tiene todos sus lados iguales al radio de la circunferencia. El centro **O** de la circunferencia se llama también **centro** del hexágono.
4. El segmento de perpendicular $\overline{OM}$ desde el centro **O** hasta el punto medio de un lado se llama **apotema** del hexágono regular.

Apotema de un polígono regular es el segmento de perpendicular trazado desde el centro al punto medio de un lado.

1. Traza y contesta:

A. Traza una circunferencia y, como si fueras a construir un hexágono regular, divídela en seis partes iguales.
Desde uno de los puntos de división une tres puntos no consecutivos.
Así obtienes un triángulo equilátero.
¿Cuánto mide cada uno de los tres arcos en que se ha dividido la circunferencia?

B. Traza una circunferencia y dos diámetros perpendiculares a ella.
¿En cuántos arcos iguales queda dividida la circunferencia?
¿Cuántos grados mide cada arco?
Traza las cuerdas que unen los puntos de división. Como los arcos son iguales ¿cómo son estas cuerdas? ¿Qué polígono regular queda trazado?

C. Traza un hexágono regular. Después traza los tres diámetros que unen los vértices.
¿En cuántos triángulos iguales queda descompuesto el hexágono?
¿Cómo son estos triángulos?

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. ¿Pueden ser los lados de un triángulo **a** = 8 cm, **b** = 2 cm y **c** = 6 cm?

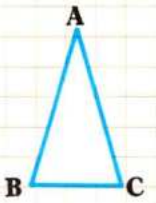
2. ¿Puede haber un triángulo cóncavo?

3. Dibuja un polígono convexo. Prolonga en los dos sentidos uno de sus lados.
   ¿Queda todo el polígono en uno de los semiplanos que determina el lado prolongado?
   ¿Ocurre esto al prolongar todos los lados?

4. Dibuja un polígono cóncavo. Busca un lado que al prolongarlo corte el polígono.

5. De los resultados de los dos ejercicios anteriores, escribe un enunciado que sirva para distinguir los polígonos convexos de los cóncavos.

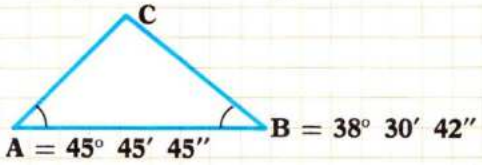
6. ¿Cuál es el único polígono convexo que no tiene diagonales?

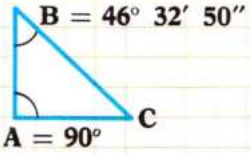


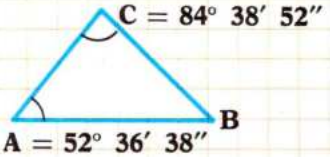
7. El ángulo $\hat{A}$ de un triángulo isósceles mide 32°.
   ¿Cuánto mide cada uno de los otros dos ángulos iguales $\hat{B} = \hat{C}$?

8. Traza dos segmentos paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que sean iguales. Une después los extremos.
   ¿Qué figura es el cuadrilátero **ABCD**?

9. Averigua el tercer ángulo de estos triángulos:



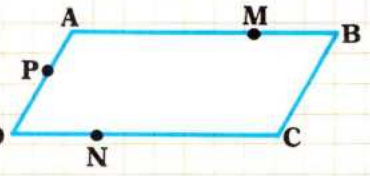




10. Construye un triángulo en cada caso conociendo:

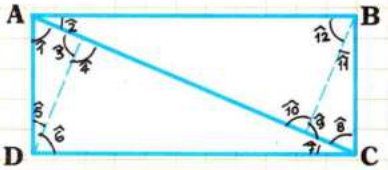
    a) **a** = 10 m, $\hat{B} = 60°$ y $\hat{C} = 75°$ b) **a** = 12 cm, **b** = 12 cm y $\hat{C} = 45°$

11. Dibuja en tu cuaderno un paralelogramo como el **ABCD** (a tamaño muy grande).
    Marca en **AB** un punto **M** y en **DC** un punto **N**, de tal forma que $\overline{AM} = \overline{CN}$. Señala un punto **P** en **AD** y completa el paralelogramo **NPMQ** con un punto **Q** en **BC**.



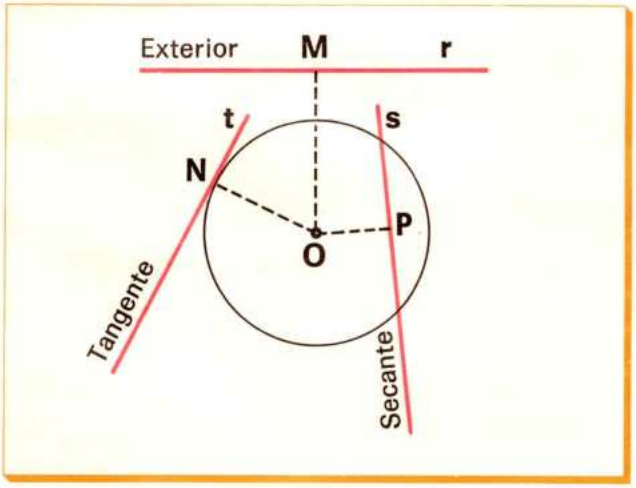
12. Dibuja en tu cuaderno un rectángulo grande y une los puntos medios de los lados.
    Une los puntos medios del segundo paralelogramo. Continúa haciendo esta operación varias veces. ¿Cómo son los nuevos paralelogramos que resultan?

13. Dibuja un rectángulo **ABCD**.
    Desde **B** y **D** traza las perpendiculares a la diagonal **AC**. De los doce ángulos señalados hay algunos que parecen iguales. Señala los que son iguales y da alguna razón de esta igualdad (ángulo de lados paralelos, etc.).



TEMA 22 LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

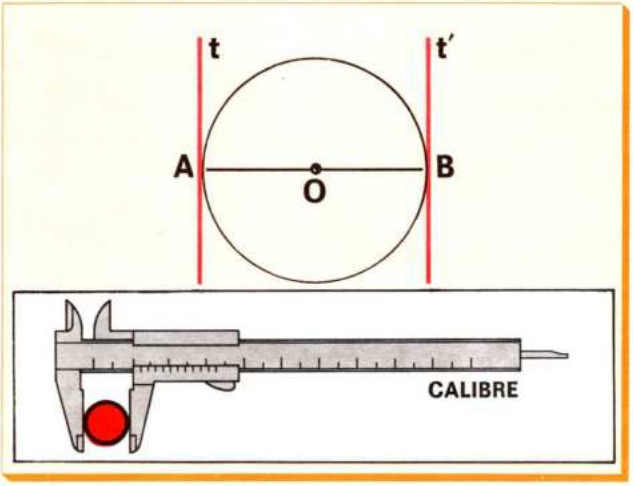
1. Posiciones de una recta respecto de una circunferencia



Posiciones de una recta respecto de una circunferencia y sus distancias al centro de la misma.

Una recta puede ocupar tres posiciones respecto de una circunferencia. Puede ser exterior, tangente o secante.

- **La recta r es exterior** a la circunferencia y la distancia del centro **O** a la recta **r** es mayor que el radio: $\overline{OM} >$ radio.
- **La recta t es tangente** a la circunferencia y la distancia del centro **O** a la recta **t** es igual al radio: $\overline{ON} =$ radio.
- **La recta s es secante** a la circunferencia y la distancia del centro **O** a la recta **s** es menor que el radio: $\overline{OP} <$ radio.



Tangentes a una circunferencia y puntos de contacto.

La recta **t** es tangente a la circunferencia. Comprueba con la escuadra que la recta **t** es perpendicular al radio $\overline{OA}$ en el punto **A**, que se llama **punto de contacto.**

Observa el diámetro $\overline{AB}$. Los puntos **A** y **B** se dice que son **diametralmente opuestos.** En el punto **B** se ha trazado otra tangente **t'** a la circunferencia.

Como las rectas **t** y **t'** son paralelas, la distancia entre ellas es el diámetro. Basándose en esta propiedad se puede hallar el diámetro de los objetos con un calibre o «pie de rey».

La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.

Las tangentes a una circunferencia en dos puntos diametralmente opuestos son rectas paralelas.

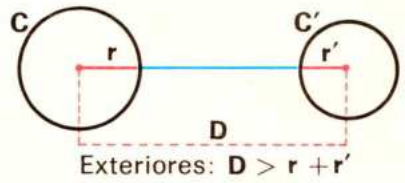
1. Dibuja y contesta:

- ¿Cómo son la tangente **t** y el diámetro $\overline{AB}$? ¿Y la tangente **t'** y el diámetro $\overline{AB}$?
- Dibuja dos rectas **a** y **b** perpendiculares a otra recta **r**: $a \perp r$ y $b \perp r$. ¿Qué puedes decir de las rectas **a** y **b**?

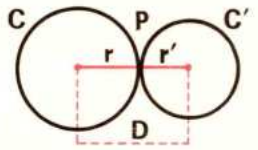
2. Con un «pie de rey», mide el diámetro de una moneda.

2. Posiciones relativas de dos circunferencias

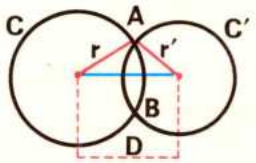
Posiciones relativas de dos circunferencias y las distancias entre sus centros.



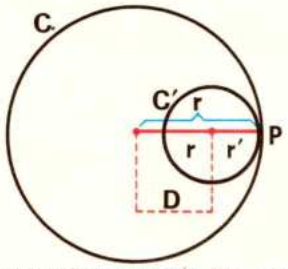
Exteriores: $D > r + r'$



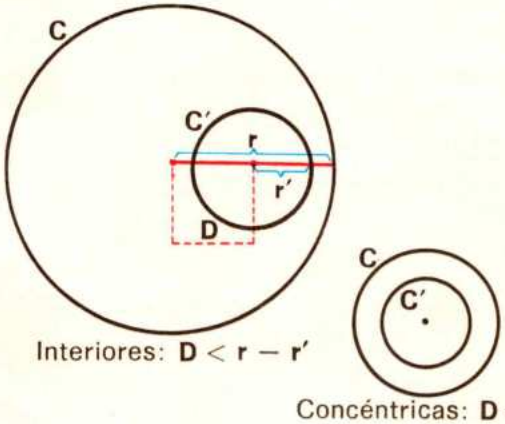
Tangentes exteriores: $D = r + r'$



Secantes: $D < r + r'$



Tangentes interiores: $D = r - r'$



Interiores: $D < r - r'$

Concéntricas: $D = 0$

Dos circunferencias **C** y **C'** pueden ocupar las seis posiciones siguientes: **exteriores, tangentes exteriores, secantes, tangentes interiores, interiores** y **concéntricas.**

Las circunferencias exteriores:

- No tienen ningún punto común, es decir, $C \cap C' = \varnothing$.
- La distancia (**D**) entre sus centros es mayor que la suma de los radios: $D > r + r'$.

Las circunferencias tangentes exteriores:

- Tienen un solo punto común, es decir, $C \cap C' = \{P\}$.
- La distancia (**D**) entre sus centros es igual a la suma de los radios: $D = r + r'$.

Las circunferencias secantes:

- Tienen dos puntos comunes, es decir, $C \cap C' = \{A, B\}$.
- La distancia (**D**) entre sus centros es menor que la suma de los radios: $d < r + r'$, ya que un lado del triángulo es menor que la suma de los otros dos.

Las circunferencias tangentes interiores:

- Tienen un solo punto común, es decir, $C \cap C' = \{P\}$.
- La distancia entre sus centros es igual a la diferencia de los radios: $D = r - r'$.

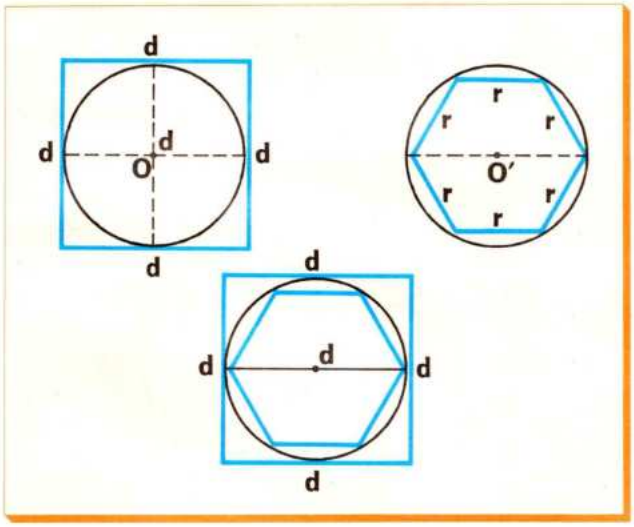
Las circunferencias interiores:

- No tienen puntos comunes, es decir, $C \cap C' = \varnothing$.
- La distancia entre sus centros es menor que la diferencia de los radios: $D < r - r'$.

Las circunferencias concéntricas:

- No tienen puntos comunes, es decir, $C \cap C' = \varnothing$.
- La distancia entre los centros es cero: $D = 0$.

3. Longitud de la circunferencia. I



La longitud de la circunferencia y su diámetro.

En la circunferencia de centro **O** se ha trazado un cuadrado con los lados tangentes a la circunferencia. Como la longitud de cada lado es igual al diámetro **d**, el perímetro del cuadrado es $4 \cdot \mathbf{d}$.

En la circunferencia de centro **O'**, que tiene el mismo radio que la de centro **O**, se ha trazado un hexágono regular.

Como cada lado del hexágono regular mide igual que el radio, el perímetro del hexágono es:

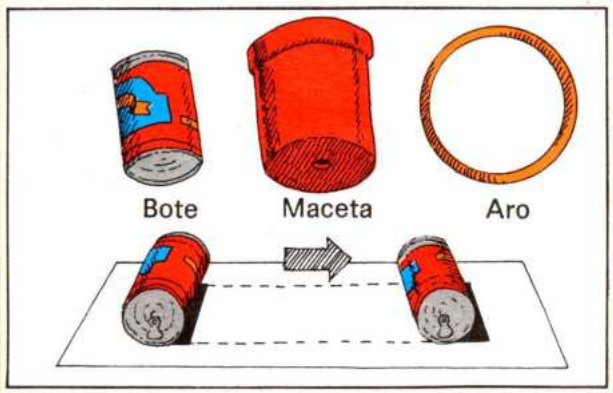
$\mathbf{6 \cdot r = 3 \cdot d}$, ya que $\mathbf{d = 2 \cdot r}$

Se observa que la longitud o perímetro de la circunferencia es menor que $4 \cdot \mathbf{d}$ y mayor que $3 \cdot \mathbf{d}$.

$$\mathbf{3 \cdot d} < \textbf{longitud de la circunferencia} < \mathbf{4 \cdot d}$$

La longitud de una circunferencia se obtiene multiplicando el diámetro por un número que es mayor que 3 y menor que 4.

Longitud de la circunferencia.



1. Toma tres objetos circulares, por ejemplo, un bote, una maceta y un aro.
2. Mide los bordes de una base del bote, de la maceta y del borde del aro. Puedes hacerlo de dos formas:
   - con un hilo no elástico,
   - haciendo rodar estos objetos sin deslizarlos.
3. Mide también el diámetro de los tres objetos.
4. Anota en una tabla los datos obtenidos.
5. Calcula en cada caso el cociente entre la longitud de la circunferencia (**L**) y su diámetro (**d**).

	Bote	Maceta	Aro
Longitud de la circunferencia (**L**)			
Diámetro (**d**)			
L : d			

Observarás que el cociente **L : d** es en los tres casos un número que se aproxima a 3,14.

El hecho de que en los tres cocientes no salga exactamente el mismo número es debido a que las medidas que obtienes son aproximadas.

El cociente **L : d** es siempre el mismo número. A este número los griegos le designaron con la letra π, que se lee **pi.**

Su valor aproximado es 3,14.

$$\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{d}} = \pi$$

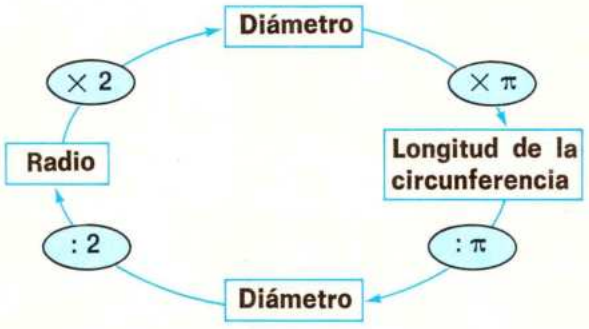
Como $\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{d}} = \pi \rightarrow \mathbf{L = d \cdot \pi}$.

$\mathbf{L = d \cdot \pi}$ — **Fórmula de la longitud de la circunferencia**

La longitud de una circunferencia es igual al producto de su diámetro por el número π.

4. Longitud de la circunferencia. II

Longitud de la circunferencia en función del radio

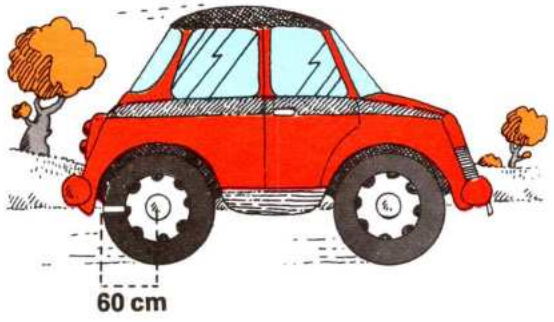


La longitud de la circunferencia es $L = d \cdot \pi$.

Como $d = 2 \cdot r$, resulta que $L = 2 \cdot r \cdot \pi$, o también: $L = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Observa en el diagrama las relaciones entre la longitud (**L**), el diámetro (**d**) y el radio (**r**) de la circunferencia.

Ademas de otros problemas derivados, hay dos problemas que se resuelven directamente con las fórmulas estudiadas.



PRIMER PROBLEMA

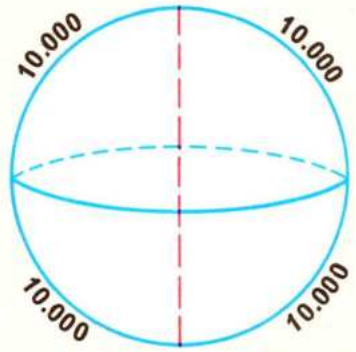
Dado el radio o el diámetro, calcular la longitud de la circunferencia

La rueda de este coche mide 60 cm de radio.

¿Cuál es la longitud de la rueda por su borde?

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 60 \text{ cm} = \mathbf{376{,}80 \text{ cm}}$$

El borde de la rueda mide 376,8 cm = 3,768 m.



SEGUNDO PROBLEMA

Dada la longitud de la circunferencia, hallar lo que miden el diámetro o el radio

El meridiano terrestre mide aproximadamente 40.000 km de longitud.

¿Cuánto mide aproximadamente el radio de la Tierra?

La fórmula $L = d \cdot \pi$ se puede escribir así: $d = \dfrac{L}{\pi}$

$$d = \frac{L}{\pi} = \frac{40000 \text{ km}}{3{,}14} = 12.739 \text{ km}$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{12.739 \text{ km}}{2} = \mathbf{6.369 \text{ km}}$$

El radio de la Tierra mide 6.369 km aproximadamente.

1. Lee y resuelve:

A. Las longitudes de los radios de cuatro circunferencias son las que figuran en la tabla. Halla la longitud de cada una de estas circunferencias.

Radio	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
Longitud de la circunferencia				

Observa las dos series de números de las dos filas de la tabla. ¿Son proporcionales?

B. La longitud de una circunferencia es 37,68 cm. Halla la longitud de su radio y de su diámetro.

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula en cada caso el diámetro de la circunferencia conociendo el radio:

① $r = 5$ cm ② $r = 10$ cm ③ $r = 2{,}5$ cm ④ $r = 3{,}6$ cm ⑤ $r = 200$ cm

2. Calcula en cada caso el radio de la circunferencia conociendo el diámetro:

① $d = 12$ cm ② $d = 7$ cm ③ $d = 5$ cm ④ $d = 36$ cm ⑤ $d = 48$ cm

3. Calcula en cada caso la longitud de la circunferencia conociendo el diámetro (no multiplicar por 3,14):

① $d = 6$ cm → $L = 6\pi$ ② $d = 8$ cm ③ $d = 5$ cm ④ $d = 9$ cm

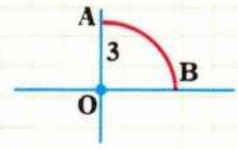
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula las longitudes de las circunferencias cuyos radios miden:

a) 7 cm b) 9 cm c) 12 cm d) 15 cm e) 20 cm

2. Dibuja dos rectas perpendiculares que se corten en un punto **O**. Con centro en **O** y radio 3 cm, traza un arco **AB** de 90°.

¿Cuál es la longitud del arco **AB**?



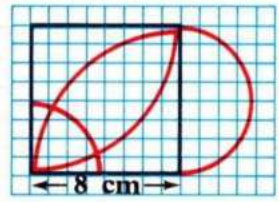
3. Si el diámetro de una circunferencia es 4 m ¿cuál es su longitud? ¿Y si el diámetro es 5 m? ¿En cuánto aumenta la longitud de una circunferencia cuando su diámetro aumenta en 4 cm?

4. Halla el perímetro del cuadrado y la longitud de la circunferencia. Mide antes la longitud del lado del cuadrado.

5. Señala en tu cuaderno dos puntos distintos **A** y **B**. Con una regla no graduada y con el compás traza la circunferencia que tiene por diámetro el segmento $\overline{AB}$.

6. Observa que en el cuadrado se han trazado tres arcos de circunferencia de 90° (cuadrantes) y una semicircunferencia.

Calcula la longitud de los cuadrantes y de la semicircunferencia.



7. Dibuja en tu cuaderno un segmento $\overline{AB}$ de 8 cm. Traza una circunferencia de centro **A** y radio 3,5 cm y otra circunferencia de centro **B** y radio 4,5 cm.

¿Cómo son estas circunferencias? ¿Cuál es la distancia de los centros?

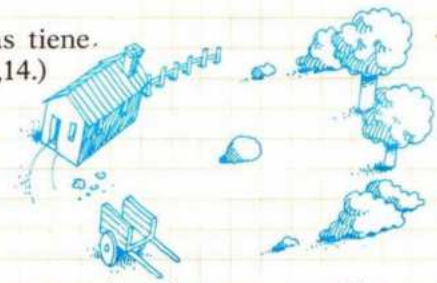
8. Dibuja en tu cuaderno dos puntos **A** y **B**. Traza después dos circunferencias **C** y **C'** tales que $C \cap C' = \{A, B\}$.

9. Un segmento $\overline{AB}$ mide 8 cm. Con centro en **A** se traza una circunferencia de 5 cm de radio y con centro en **B** otra circunferencia de 4 cm de radio. Completa el enunciado de este problema para que resulten dos problemas diferentes y resuélvelos.

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. La rueda de un camión tiene 90 cm de radio. ¿Cuánto avanza el camión cuando la rueda ha dado 100 vueltas?

2. Las ruedas de un coche tienen 30 cm de radio. ¿Cuántas vueltas tiene que dar cada rueda para recorrer 37.680 metros? (Toma $\pi = 3{,}14$.)



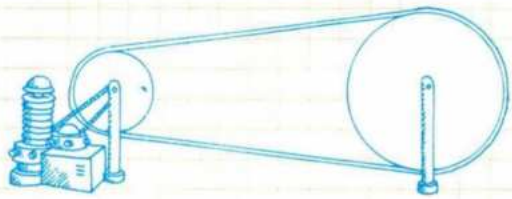
3. Si sabes que hay un tesoro escondido bajo tierra a 2 metros de la piedra y 10 cm de profundidad ¿qué harías para encontrarlo de modo seguro?

4. La circunferencia de una noria tiene 6 m de radio y 12 cangilones con la misma separación entre ellos.

¿Cuál es la longitud del arco que hay entre cada dos cangilones?

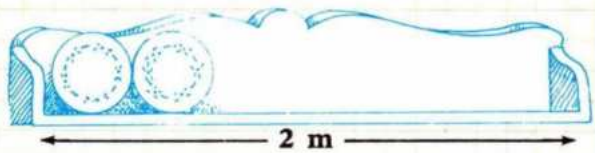
5. Dos ruedas están unidas por una correa sin fin. La rueda pequeña tiene de radio 10 cm y gira accionada por un motor dando 100 vueltas por minuto. La rueda grande tiene de radio 40 cm.

¿Cuántas vueltas por minuto dará esta segunda rueda?



6. En un estante de 2 metros de longitud se desea colocar platos cuyos bordes tienen una longitud de 62,8 cm como indica el dibujo.

¿Cuántos platos se pueden colocar?



7. Al cambiar los neumáticos de un coche, el fabricante garantiza que dichos neumáticos tienen la resistencia suficiente para dar unos 250 millones de vueltas. Si el radio del neumático es 20 cm ¿cuántos kilómetros puede recorrer el coche llevando la garantía del fabricante de neumáticos?

8. Laura se ha montado en el caballo que está a 3,5 m del centro de la plataforma que gira y su amiga Eva se ha montado en el tigre que está a 2 m del centro.

Cuando la plataforma ha dado 50 vueltas ¿qué camino ha recorrido Laura? ¿Y Eva?

9. El radio de la rueda delantera de una bicicleta de circo mide 20 cm y el radio de la rueda trasera mide 30 cm. En cada neumático hay una señal roja que coincide con el suelo en la posición 1. En la posición 2 vuelven a coincidir por primera vez dos señales rojas en el suelo.

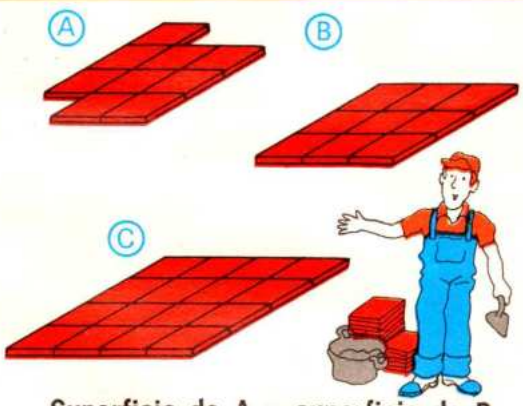
¿Cuánto ha avanzado como mínimo la bicicleta desde la posición (1) hasta la posición (2)?
¿Cuántas vueltas ha dado la rueda delantera? ¿Y la rueda trasera?

Posición (1) **Posición (2)**

TEMA 23 MEDIDAS DE SUPERFICIE

1. Medir superficies. Área de una figura. I

Medir superficies.

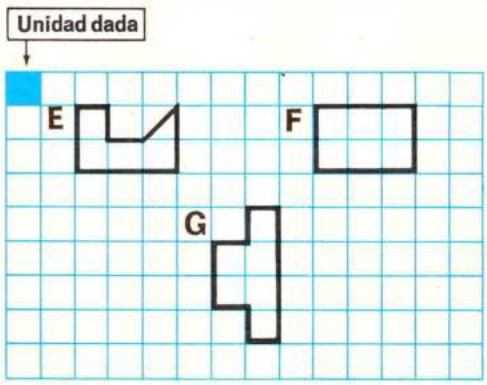


Superficie de A = superficie de B
Superficie de C > superficie de A

El solador cobra lo mismo por embaldosar la habitación (A) que por embaldosar la habitación (B) porque en las dos habitaciones caben el mismo número de baldosas iguales. Se dice que las dos habitaciones tienen la misma **extensión** o la misma **superficie**.

En cambio, la habitación (C) tiene más superficie que la habitación (A) y más superficie que la habitación (B)

Área de una figura.



Área de E=4,5. Área de G=6. Área de F=6

Para medir la extensión o superficie de una figura se toma generalmente como unidad de medida un cuadrado cuyo lado sea una unidad de longitud.

El número de cuadrados y partes del mismo que contiene una figura se llama **área** de dicha figura.

Así, las áreas de las figuras **E**, **F** y **G**, tomando como unidad el cuadro de la cuadrícula, son:

- área de **E** = 4,5
- área de **F** = 6
- área de **G** = 6

Las figuras **F** y **G** tienen la misma área y se dice que son **figuras equivalentes.**

Medir la superficie o extensión de una figura es hallar las veces que ésta contiene a otra superficie que se toma como unidad.

La unidad de superficie es, en general, un cuadrado que tiene por lado una unidad de longitud.

Área de una figura es la medida de su superficie.

1. **Dibuja en papel cuadriculado tres figuras A, B y C tales que:**

   área de **A** = 8; área de **B** = 9; área de **C** = 12

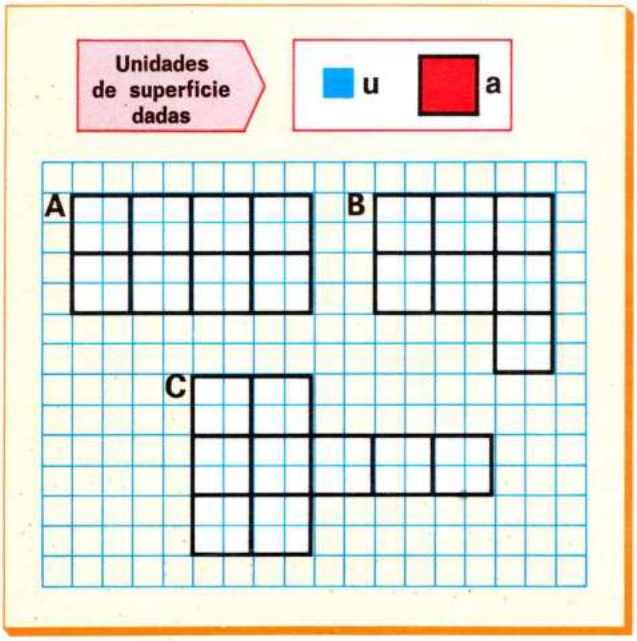
2. **Dibuja en papel cuadriculado dos figuras de forma diferente pero que sean equivalentes (que tengan la misma área).**

3. **Dibuja en papel cuadriculado tres figuras M, N y P.**

   Área de **M** = 6,5; área de **N** = 8,5; área de **P** = área de **M** + área de **N**.
   Toma como unidad el cuadrado de la cuadrícula.

2. Medir superficies. Áreas de una figura. II

El área de una figura y la unidad elegida.



Si se toma como unidad de medida el cuadrado rojo (**a**). las áreas de las figuras **A**, **B** y **C** son:

- área de **A** = **8a**
- área de **B** = **7a**
- área de **C** = **9a**

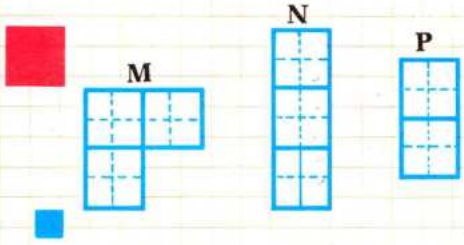
En cambio, si se toma como unidad de medida el cuadrado azul (**u**), las áreas de las figuras **A**, **B** y **C** vienen expresadas por números diferentes a los anteriores.

Como **a** = 4 · **u**, las áreas en las figuras **A**, **B** y **C** son:

- área de **A** = **8** · **4u** = **32u**
- área de **B** = **7** · **4u** = **28u**
- área de **C** = **9** · **4u** = **36u**

La extensión o superficie de una figura es siempre la misma, pero su área depende de la unidad de superficie elegida.

1. Observa las figuras M, N y P:



A. Halla el área de las figuras **M**, **N** y **P** si se toma como unidad de medida el cuadrado rojo.

B. Halla el área de estas figuras si se toma como unidad de medida el cuadrado azul.

C. ¿Hay entre las figuras dibujadas dos figuras que sean equivalentes, es decir, que tengan la misma área?

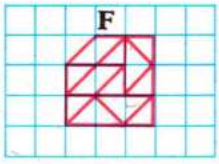
2. En un papel cuadriculado, toma como unidad (u) y dibuja tres figuras E, F y G tales que:

área de **E** = **3u**, área de **F** = **4u**, área de **G** = **5u**

Tomando como unidad el cuadrado de la cuadrícula □ escribe el área de las figuras que has dibujado.

3. Dibuja en papel cuadriculado cuatro figuras equivalentes cuya área sea 9 cuadrados de la cuadrícula.

4. Expresa el área de la figura F:



A. Tomando como unidad la mitad del cuadrado (triángulo).

B. Tomando como unidad el cuadrado.

3. Unidades de superficie

El metro cuadrado (m^2).

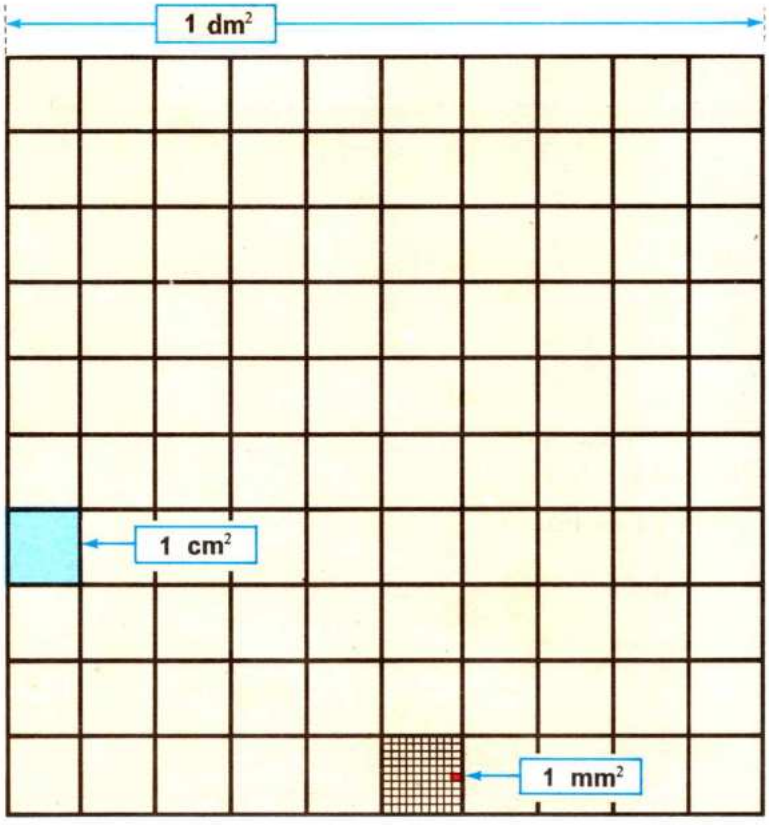
Para medir superficies se puede tomar como cuadrado unidad un cuadrado cualquiera.

Sin embargo, hoy día, se utilizan como unidades de superficie los cuadrados que tienen por lados las unidades de longitud del Sistema Internacional (SI).

La unidad principal de superficie es el **metro cuadrado**, que se escribe **m^2**.

El metro cuadrado (m^2) es la superficie de un cuadrado de un metro de lado.

Múltiplos y submúltiplos del m^2. Relaciones.



El decímetro cuadrado (**dm^2**) es la superficie de un cuadrado de 1 dm de lado.

El centímetro cuadrado (**cm^2**) es la superficie de un cuadrado de 1 cm de lado.

El milímetro cuadrado (**mm^2**) es la superficie de un cuadrado de 1 mm de lado.

El **dm^2**, el **cm^2** y el **mm^2** son los **submúltiplos** del m^2.

El cuadrado grande es 1 decímetro cuadrado.

Observa que:

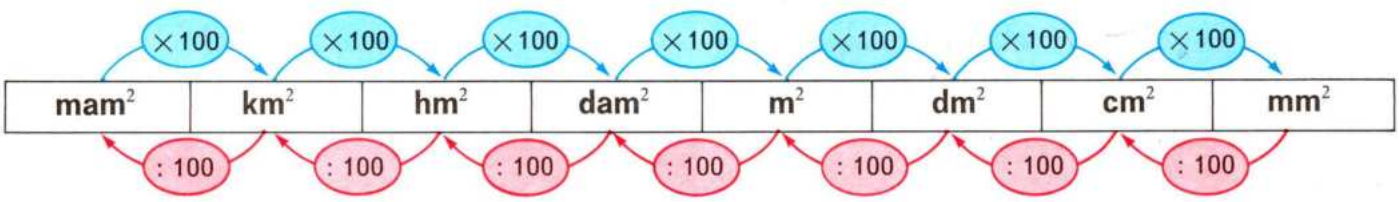
1 dm^2 = 100 cm^2 y que 1 cm^2 = 100 mm^2.

Observa que cada unidad es 100 veces mayor que la unidad siguiente inferior.

Esta misma relación es válida para los **múltiplos** del metro cuadrado, que son:

- **miriámetro cuadrado (mam²)**
- **kilómetro cuadrado (km²)**
- **hectómetro cuadrado (hm²)**
- **decámetro cuadrado (dam²).**

El mam^2 no se usa en la práctica.

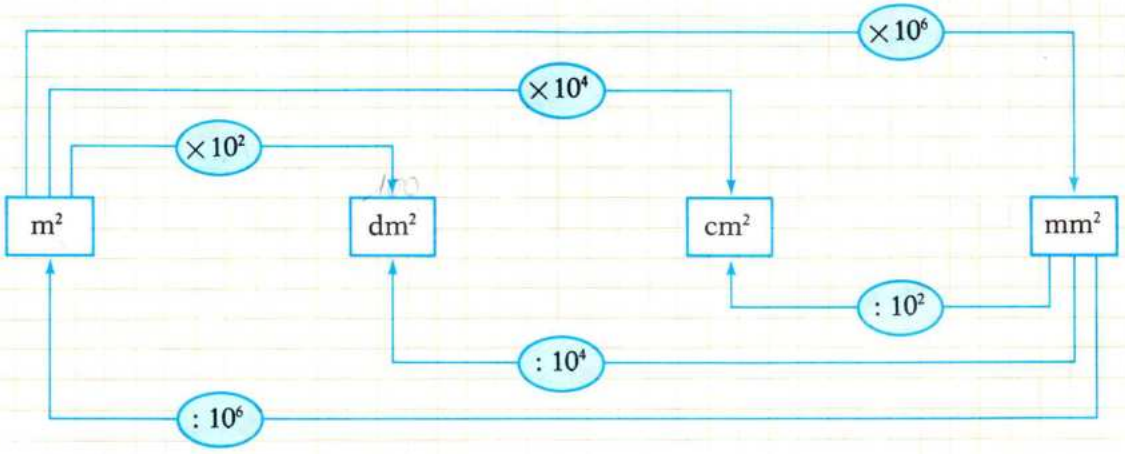


Cada unidad de superficie es 100 veces mayor que la inmediata inferior y 100 veces menor que la inmediata superior.

Actividades

1. Observa el esquema.

Recuerda que $10^2 = 100$, $10^4 = 10.000$ y $10^6 = 1{,}000.000$ y completa:



Para pasar de m^2 a dm^2 se multiplica por 100.

Para pasar de m^2 a cm^2 se...

Para pasar de m^2 a mm^2 se...

Para pasar de mm^2 a cm^2 se...

Para pasar de mm^2 a dm^2 se...

Para pasar de mm^2 a m^2 se...

2. Completa:

a) 48 m^2 = ... dm^2

b) 36 dm^2 = ... cm^2

c) 52 hm^2 = ... m^2

d) 3 km^2 = ... dam^2

e) 6 hm^2 = ... dm^2

f) 8 m^2 = ... m^2

3. Con el cuadro de unidades es fácil cambiar de unas unidades a otras. Recuerda que hay que prever dos cifras para cada unidad.

Expresemos en diversas unidades 328,6 m^2. (El trazo azul indica en cada caso la unidad.)

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2	
		3	28	6			328,6 m^2
		3	28	6			3,286 dam^2
	0	03	28	6			0,03286 hm^2
		3	28	60			32.860 dm^2
		3	28	60	00		3,286.000 cm^2

Con el cuadro de unidades, expresa 426,5 dam^2:

a) en km^2 b) en hm^2 c) en m^2 d) en dm^2

4. Expresa en m^2:

a) 32,5 dam^2

b) 3 hm^2

c) 0,32 hm^2

d) 0,54 km^2

e) 36 dm^2

f) 483 mm^2

g) 36,4 cm^2

h) 28,28 dm^2

4. Complejos e incomplejos de superficie. I

$1\ ha = 1\ hm^2 = 10.000\ m^2$
$1\ a = 1\ dam^2 = 100\ m^2$
$1\ ca = 1\ m^2$

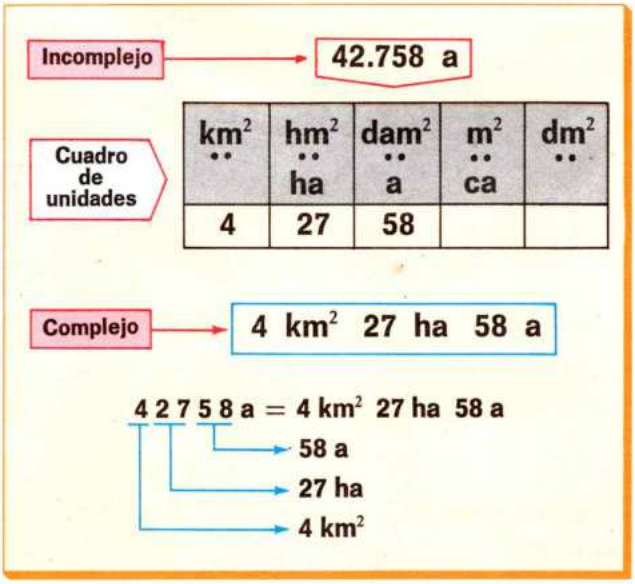
$1\ ha = 100\ a$
$1\ a = 100\ ca$

Unidades agrarias.

Para medir las extensiones de los campos se utilizan otras unidades de superficie llamadas **unidades agrarias,** que son: el **área**, la **hectárea** y la **centiárea**.

Sus equivalencias con las unidades de superficie ya conocidas son:

- **El área (a),** que equivale al dam^2.
- **La hectárea (ha),** que equivale al hm^2.
- **La centiárea (ca),** que equivale al m^2.



Paso de incomplejo a complejo.

Hay que distinguir dos casos según que el incomplejo tenga o no parte decimal.

PRIMER CASO

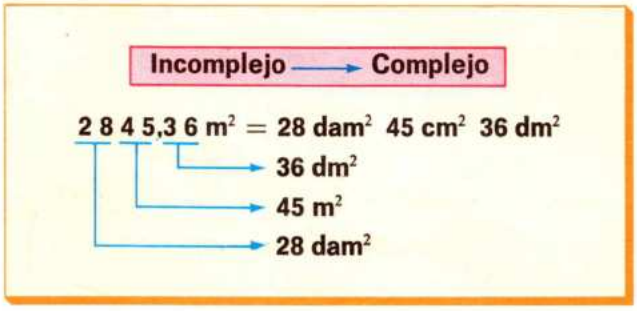
Cuando el incomplejo no tiene parte decimal

En este caso basta colocar el incomplejo en el **cuadro de unidades.**

Recuerda que en las medidas de superficie hay que reservar dos cifras para cada unidad.

Por ejemplo: expresar en forma compleja **42.758 a.**
Se escribe este incomplejo de derecha a izquierda a partir de la casilla de los dam^2 o áreas, colocando dos cifras en cada casilla.

También se puede hacer el paso de incomplejo a complejo agrupando las cifras en grupos de dos empezando por la derecha.



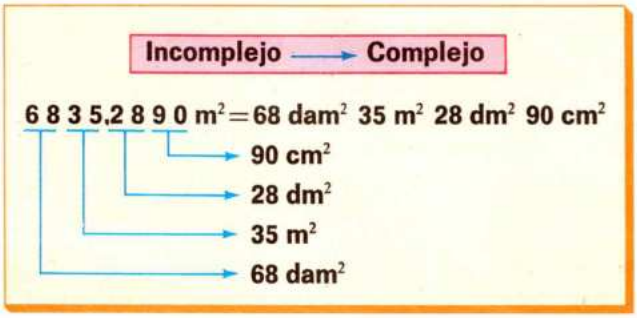
SEGUNDO CASO

Cuando el incomplejo tiene parte decimal

Si el número de cifras decimales del número incomplejo es par, partiendo de la coma se hacen grupos de dos cifras decimales a la izquierda y a la derecha de ella.

Por ejemplo, el incomplejo **2.845,36 m^2** se reduce a complejo así:

$$2.845,36 = 28\ dam^2\ 45\ m^2\ 36\ dm^2$$

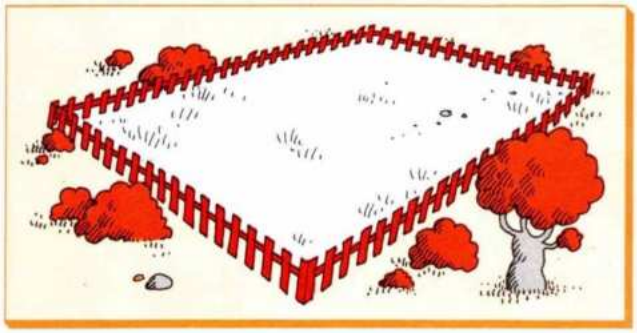


Si el número de cifras decimales del incomplejo es impar, se le agrega un cero a la derecha y se procede como en el caso anterior.

Ejemplo: $6.835,289\ m^2 = 6.835,2890\ m^2$.

$$6.835,2890\ m^2 = 68\ dam^2\ 35\ m^2\ 28\ dm^2\ 90\ cm^2$$

5. Complejos e incomplejos de superficie. II



Paso de complejo a incomplejo.

Conviene distinguir dos casos, según que en el número complejo falten o no unidades intermedias.

PRIMER CASO

Cuando en el complejo no faltan unidades intermedias

Un terreno mide 2,5 hm^2 6 dam^2 8 m^2.

¿Cuántos metros cuadrados mide el terreno?

Observa dos formas de resolver el problema:

PRIMERA FORMA

Reduciendo a m^2:

Se reducen las cantidades a m^2 y se suman:

$$\begin{aligned} 2{,}5\ hm^2 &= 25.000\ m^2 \\ 6\ dam^2 &= 600\ m^2 \\ 8\ m^2 &= 8\ m^2 \\ \hline & \boxed{25.608\ m^2} \end{aligned}$$

SEGUNDA FORMA

Con el cuadro de unidades:

1.º Se escriben las unidades en el cuadro.

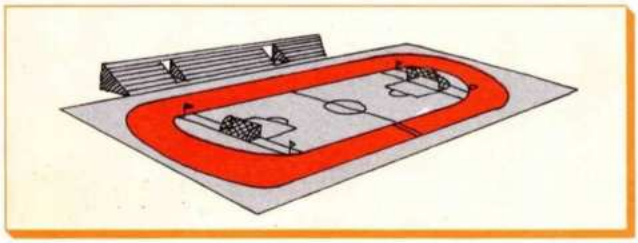
hm^2	dam^2	m^2
	6	8
2	5	

2.º Se completan con ceros las casillas de las unidades en que sólo exista una cifra y después se suman los números de la misma casilla.

hm^2	dam^2	m^2
	06	08
2	50	
2	56	08

25.608 m^2

El terreno mide 2,5 hm^2 6 dam^2 8 m^2 = 25.608 m^2



SEGUNDO CASO

Cuando en el complejo faltan unidades intermedias

Un campo de deportes mide 36 hm^2 y 4 m^2.

¿Cuántos metros cuadrados mide el campo?

Observa dos formas de hacer esta reducción:

PRIMERA FORMA

Reduciendo a m^2:

Se reducen las cantidades a m^2 y después se suman:

$$\begin{aligned} 36\ hm^2 &= 360.000\ m^2 \\ 4\ m^2 &= 4\ m^2 \\ \hline & \boxed{360.004\ m^2} \end{aligned}$$

SEGUNDA FORMA

Con el cuadro de unidades:

1.º Se escriben las unidades en el cuadro.

hm^2	dam^2	m^2
36		4

2.º Se completan con dos ceros las unidades intermedias que faltan (en este caso los dam^2), y como en la casilla de los m^2 hay sólo una cifra, se escribe otro cero en ella.

hm^2	dam^2	m^2
36	00	04

360.004 m^2

El campo de deportes mide 36 hm^2 4 m^2 = 360.004 m^2

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Di cuántos metros cuadrados son:

① 5 dam^2 ② 800 dm^2 ③ 3 hm^2 ④ 1.000 dm^2 ⑤ 6 m^2 ⑥ 7 ha ⑦ 84 ca ⑧ 8 a ⑨ 5 ha ⑩ 25 ca

2. Di cuántos centímetros cuadrados son:

① 6 dm^2 ② 8 dm^2 ③ 3 m^2 ④ 700 mm^2 ⑤ 600 mm^2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dibuja en papel cuadriculado dos figuras equivalentes cuya área sea 16 cuadrados de la cuadrícula.

2. ¿Qué operación hay que realizar para pasar de una unidad de superficie a la inmediata superior?

3. Recorta un cuadrado de papel de 1 dm^2. Divide dos lados contiguos en 10 partes iguales y haz la descomposición del decímetro cuadrado en centímetros cuadrados.

4. Dibuja en el suelo un cuadrado de 1 metro de lado.
Coloca sobre él en fila 10 cuadrados de papel de 1 dm^2.
¿Cuántos decímetros cuadrados caben en 1 m^2?

5. Expresa en decímetros cuadrados:

a) 82,3 m^2 c) 6,4 m^2 e) 37,8 dam^2 g) 0,3 ha
b) 4,1 a d) 0,73 km^2 f) 78.000 mm^2 h) 0,54 ca

6. Expresa en forma compleja:

a) 3.562,48 m^2 b) 5,67 dam^2 c) 9.834,371 m^2

7. Expresa en incomplejo de metros cuadrados:

a) 6,4 hm^2 8 dam^2 6 m^2 b) 48 km^2 3 hm^2 6 dam^2 5 m^2

8. Expresa primero en m^2 y después realiza las operaciones que se indican:

a) (3 ha 25 a 72 a) $\times$ 5 c) 8 ha : 5 e) 19 ha 17 a 45 m^2 : 3
b) (26 ha 56 a 90 ca) : 6 d) 7 ha 25 a : 5 f) 3 ha 6 a : 3

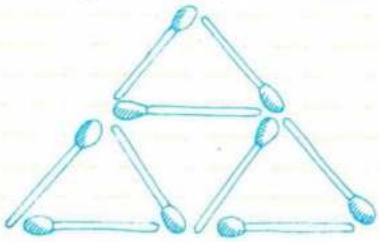
9. ¿Cuántas personas caben de pie en un patio de 300 m^2 si cada persona ocupa una superficie de 20 dm^2?

10. De una finca de 125 ha se han vendido los $\frac{2}{5}$ a 5,50 ptas. el m^2 y el resto a 5.000 ptas. el área.
¿Cuánto se ha obtenido por la venta?

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

JUEGO CON CERILLAS

Con 9 cerillas iguales se pueden formar cuatro triángulos equiláteros.



Pero también se pueden formar cuatro triángulos equiláteros con sólo 6 cerillas. ¿Cómo?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Una persona ha dividido su finca en dos partes. La parte mayor mide 6 ha 48 a 25 ca. Ha vendido toda la finca a razón de 250 ptas. el metro cuadrado y ha obtenido por la venta 25 millones de pesetas.

   ¿Cuál es la superficie de la finca? ¿Cuál es la superficie de la parte menor? ¿Cuál es el valor de cada una de las dos partes?

2. Un día de lluvia han caído 82 litros de agua en cada metro cuadrado.

   ¿Cuántos hectolitros de agua han caído en un campo de 20 ha y 85 ca?
   Si el 15 % del agua caída en el campo va a parar a un pantano ¿cuántos litros de agua aporta al pantano el citado campo?

3. De una finca de 24 ha 64 a y 50 ca se venden los $\frac{2}{3}$ a razón de 150 ptas. el metro cuadrado, y el resto a 2.000 ptas. el decámetro cuadrado.

   ¿Cuánto se obtiene por la venta?

4. La superficie de Europa es, aproximadamente, veinte veces mayor que la superficie de España. Si la superficie de Europa es aproximadamente de 10,000.000 de km^2 ¿cuál es la superficie aproximada de España en kilómetros cuadrados?

5. De la superficie total de la Tierra los $\frac{3}{4}$, aproximadamente, están ocupados por los océanos y mares y el resto por los continentes.

   Si la superficie total de la Tierra es 510,100.000 km^2, averigua la superficie que ocupan los continentes y la que ocupan los océanos y mares.

6. La isla mayor de la Tierra es Groenlandia, con 2,180.000 km^2, y una de las islas más pequeñas es Cabrera, con 20 km^2.

   ¿Cuál es el número de veces que cabe la segunda en la primera?

7. Antonio tiene una finca de 1.500 a. Una de las parcelas de la finca es de regadío y ocupa los $\frac{2}{5}$ del total de la finca. El resto es de secano.

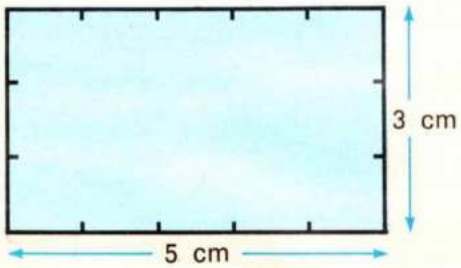
   Antonio vende la finca y percibe 2.500 ptas. por metro cuadrado de regadío y 1.500 ptas. por cada área de secano.

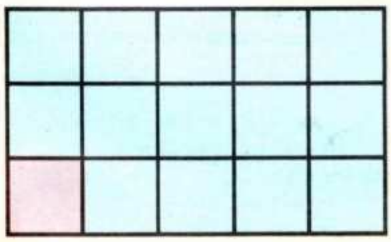
   ¿Cuál es el valor total de la finca?

TEMA 24 ÁREA DE POLÍGONOS

1. Área del rectángulo: Fórmulas

Área del rectángulo.

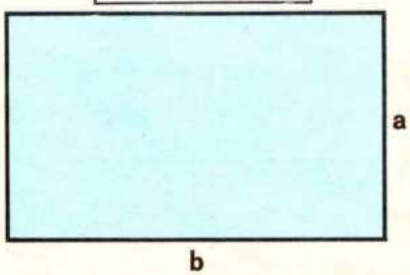




Área = 5 cm × 3 cm = 15 cm²

Área = base × altura

$$A = b \times a$$



Las dimensiones de este rectángulo son:

largo o base = 5 cm
ancho o altura = 3 cm

¿Cuál es el área de este rectángulo?

Observa cómo se cuadricula el rectángulo trazando paralelas a los lados por los puntos que indican los centímetros. Se obtienen 15 cuadrados de 1 cm²

El área del rectángulo es **A = 15 cm²**

El área del rectángulo es **A = 5 cm × 3 cm = 15 cm²**

Área del rectángulo = **largo × ancho**, o también:

área del rectángulo = base × altura

Si la base y la altura vienen expresadas en unidades diferentes, hay que reducirlas a una misma unidad.

Si se designan **A** → área; **b** → base; **a** → altura, resultan estas fórmulas equivalentes:

$$A = b \times a \rightarrow a = \frac{A}{b} \rightarrow b = \frac{A}{a}$$

El área de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura.
La altura del rectángulo es igual al área dividida por la base.
La base del rectángulo es igual al área dividida por la altura.

1. Calcula en el siguiente cuadro el elemento que falta:
(Área = **A**; base o largo = **b**, y altura o ancho = **a**.)

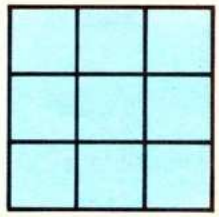
Largo (b)	8 cm		7,5 dam	50 cm	3,5 dm
Ancho (a)	6 cm	0,8 dm			17 cm
Área (A)		112 cm²	975 m²	625 cm²	

2. Resuelve:

Un terreno tiene de largo 84 m y de ancho 72 m. En el terreno se ha construido una casa de forma rectangular de 12 m de largo y 10 de ancho.

¿Cuál es el área de la parte de terreno libre?

2. Área del cuadrado. Cálculo del lado



Área = lado × lado = 3 cm × 3 cm = 9 cm²

Área = lado × lado

$$\boxed{A = L \times L = L^2}$$

Área del cuadrado.

El cuadrado es un rectángulo que tiene las dos dimensiones iguales. Por esta razón, su área se obtiene multiplicando la longitud de un lado **L** por él mismo.

Así el área del cuadrado de lado 3 es:

$$A = 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}^2$$

En general, si el lado es **L** el área es:

$$A = L \times L = L^2$$

Área del cuadrado = lado × lado = lado al cuadrado.

Cálculo del lado conociendo el área.

Lado en cm (L)	Área en cm² (A)	
3 cm	$3^2 = 9$	$L = \sqrt{9} = 3$
4 cm	$4^2 = 16$	$L = \sqrt{16} = 4$
5 cm	$5^2 = 25$	$L = \sqrt{25} = 5$

En la tabla aparecen las medidas de los lados y las áreas de varios cuadrados.

Se observa que el lado de un cuadrado es igual a la raíz cuadrada de su área.

Si el área es 16 cm², el lado es $\sqrt{16} = 4$ **cm.**

Si el área es 25 cm², el lado es $\sqrt{25} = 5$ **cm.**

El área de un cuadrado es igual a la longitud del lado al cuadrado.
El lado de un cuadrado es igual a la raíz cuadrada de su área.

1. Un patio de recreo es un cuadrado de 23 m de lado. ¿Cuál es su área?

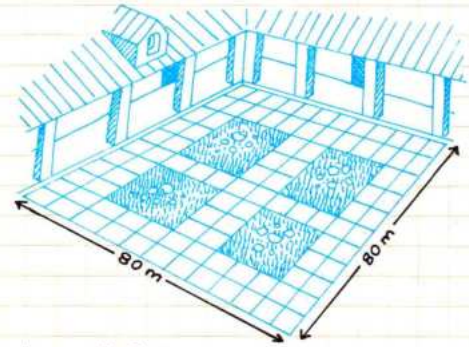
2. El perímetro de un solar cuadrado es de 160 m. ¿Cuál es su área en metros cuadrados?

3. Resuelve:

El suelo de un patio cuadrado de 80 m de lado se cubre de baldosas, excepto cuatro cuadrados interiores iguales de 3 m de lado que se dedican al cultivo de flores.

A. ¿Cuál es la medida de la superficie dedicada al cultivo de flores?

B. ¿Cuál es la medida de la superficie embaldosada?



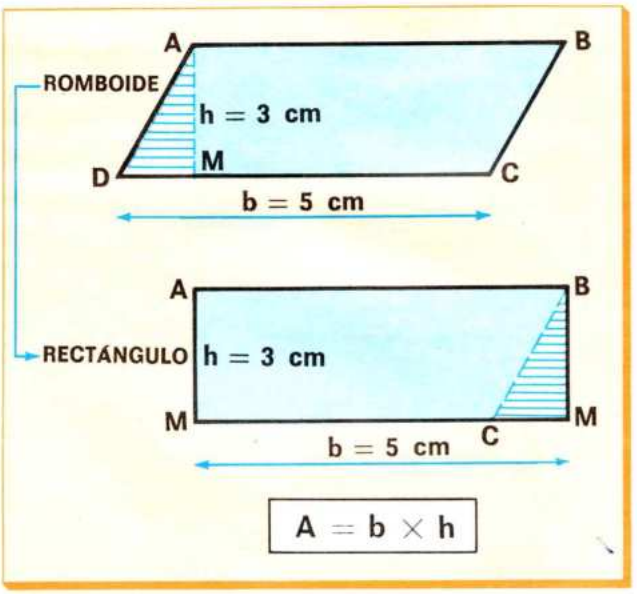
4. El área de un cuadrado es 81 m². ¿Cuál es la longitud de su lado?

5. Halla el lado de los cuadrados cuyas áreas son:

a) 144 m² b) 256 m² c) 361 m² d) 1.256 m² e) 324 m²

3. Área del paralelogramo

Área del romboide.



Calca el romboide **ABCD** y recórtalo. Después traza la altura **AM** y recorta el triángulo rayado.

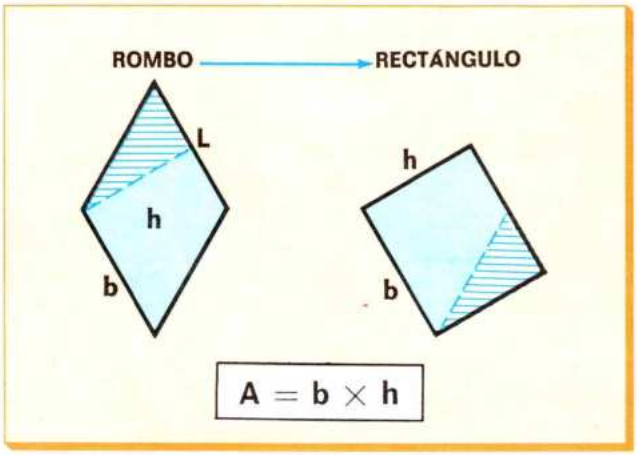
Coloca el triángulo recortado de modo que el lado **AD** coincida con el lado **BC**. Así se forma un rectángulo de la misma base (5 cm) y la misma altura (3 cm) que el romboide.

Por lo tanto, las áreas del rectángulo y del romboide son iguales:

$$\mathbf{A} = 5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = \mathbf{15 \text{ cm}^2}$$

Área del romboide = base × altura

Área del rombo.

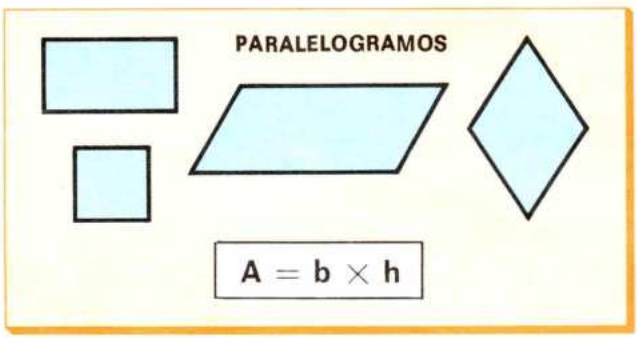


Al igual que el romboide, un rombo también se puede convertir en un rectángulo que tenga base y altura iguales a las del rombo.

Para ello se recorta el triángulo rayado y se coloca como indica la figura. De aquí resulta que:

Área del rombo = base × altura

Área de un paralelogramo cualquiera.



Para todos los paralelogramos es válida esta fórmula:

Área del paralelogramo = base × altura

Es decir, $\mathbf{A = b \times h}$.

Esta fórmula también se puede utilizar para hallar la base o la altura:

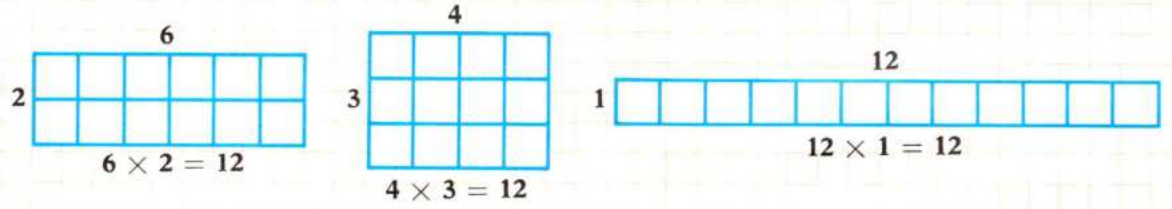
$$\mathbf{b = \frac{A}{h}} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{h = \frac{A}{b}}$$

El área de un paralelogramo cualquiera es igual al producto de la base por la altura.

Actividades

1. Dibuja en un papel cuadriculado un rectángulo cuyas dimensiones sean 6 cm y 4 cm.

2. En las siguientes figuras se asocia a cada producto de dos factores un rectángulo:



Calcula el perímetro de estos rectángulos tomando como unidad de longitud el lado del cuadrado de la cuadrícula.

3. Dibuja en papel cuadriculado todos los rectángulos que puedas cuyo perímetro sea 24. Calcula después el área de cada uno.

¿Cuál de ellos tiene mayor área?

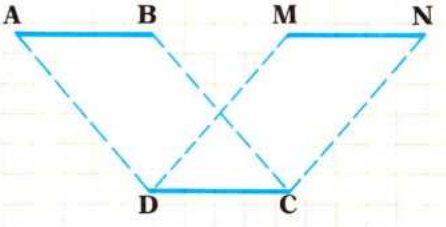
4. Halla el área de un paralelogramo cuya base mide 15 m y su altura mide 1,2 dam.

5. Dibuja en papel cuadriculado varios rectángulos que tengan de área 36 (toma como unidad de superficie el cuadrado de la cuadrícula). Halla el perímetro de estos rectángulos.

¿Cuál de ellos tiene menor perímetro?

6. Halla la base de un paralelogramo sabiendo que su área es 8 m^2 y su altura mide 20 dm.

7. Los cuadriláteros **ABCD** y **MNCD** son paralelogramos, y los puntos **A**, **B**, **M** y **N** están alineados. Compara las áreas de los dos paralelogramos.

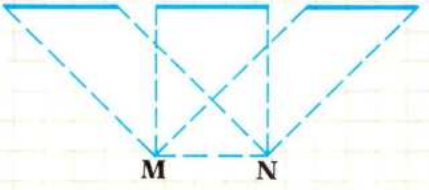


8. Designa por **b** → base del paralelogramo, **a** → altura, **A** → área.

Escribe con estas letras la fórmula del área del paralelogramo y las fórmulas que permiten calcular la base y la altura.

9. Dibuja en tu cuaderno varios paralelogramos como los de la figura que tienen el lado **MN** común.

¿Qué puedes decir de sus áreas?



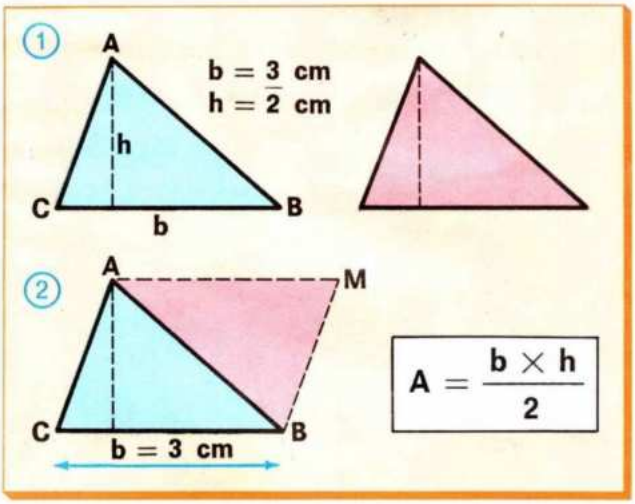
10. Dibuja un rectángulo y un cuadrado en una hoja de papel cuadriculado. Señala en cada figura los puntos medios de cada lado y únelos.

¿Qué paralelogramo se forma en cada caso?

Recórtalo y compara el área de los paralelogramos con los de partida.

4. Área del triángulo

Área de un triángulo cualquiera.



(1) Dibuja dos triángulos iguales y colorea uno de azul y otro de rojo.

(2) Recórtalos y colócalos como indica la figura.

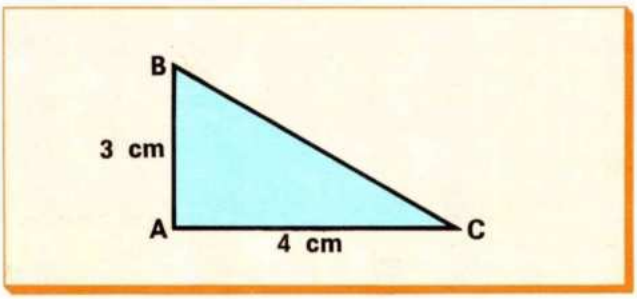
Así se forma un paralelogramo cuya área es doble del área del triángulo y que tiene la misma base y la misma altura.

Por tanto, el área del triángulo **ABC** es la mitad del área del paralelogramo **AMBC.**

Área del paralelogramo = $\mathbf{b \times h} = 3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = \mathbf{6 \text{ cm}^2}$

Área del triángulo $= \frac{\mathbf{b \times h}}{\mathbf{2}} = \frac{6 \text{ cm}^2}{2} = \mathbf{3 \text{ cm}^2}$

Área de un triángulo rectángulo.



En el caso del triángulo rectángulo **ABC**, si se toma como base un cateto **AC = 4 cm**, la altura es el otro cateto **AB** = 3 cm.

Por tanto,

Área del triángulo rectángulo $= \frac{\text{cateto mayor} \times \text{cateto menor}}{2} =$

$= \frac{4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}}{2} = \mathbf{6 \text{ cm}^2}$

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de su base y de su altura.
El área de un triángulo rectángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de sus catetos.

1. Completa la siguiente tabla.

Recuerda que los datos se refieren a un triángulo y que las operaciones hay que realizarlas con las dimensiones expresadas en la misma unidad.

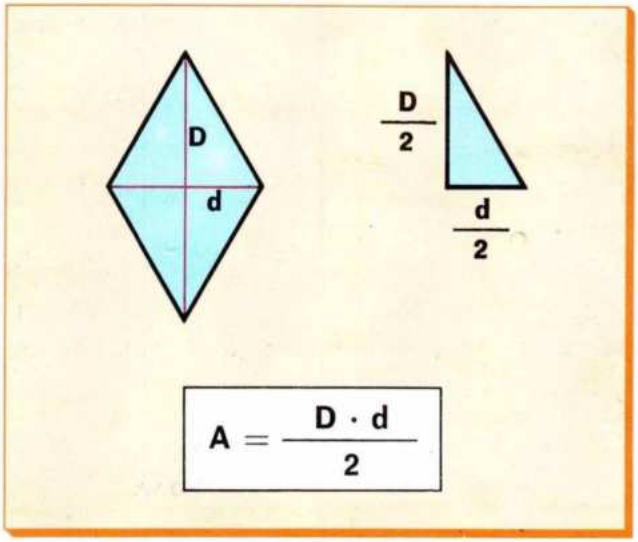
Base	15 m	36 m		8,5 m	25 dm	6,4 h		5,8 m
Altura	8 m	50 dm	15 cm	32 dm		35 dam	36 dam	36 cm
Área			2,7 dm^2		1,56 m^2		9 ha	

2. Lee y completa.

Si **b** y **h** son la base y la altura de un triángulo ¿cuáles de las siguientes son fórmulas correctas del área del triángulo? Comprueba con los valores **b** = 8 cm, **h** = 6 cm. Completa la tabla escribiendo SÍ o NO.

$\frac{b \times h}{2}$	$b \times \frac{h}{2}$	$\frac{b}{2} \times h$	$\frac{1}{2}(b \times h)$	$\frac{b}{2} \times \frac{h}{2}$	$\frac{b + h}{2}$

5. Área del rombo



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Área del rombo en función de las diagonales.

Considera el rombo en el que se designa:

D → diagonal mayor

d → diagonal menor

Las dos diagonales dividen al rombo en cuatro triángulos rectángulos iguales.

En cada triángulo los catetos son: $\frac{D}{2}$ y $\frac{d}{2}$.

El área de un triángulo es:

$$\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\frac{D}{2} \times \frac{d}{2}}{2} = \frac{\frac{D \times d}{4}}{2} = \frac{D \times d}{8}$$

$$\text{Área del rombo} = 4 \times \frac{D \times d}{8} = \frac{D \times d}{2}$$

El área de un rombo es igual a la mitad del producto de las longitudes de las diagonales.

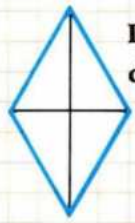
1. Halla el área de los rombos cuyas diagonales son:

① **D** = 0,8 m, **d** = 6 dm ② **D** = 18 cm, **d** = 1,2 dm ③ **D** = 8 hm, **d** = 60 dam ④ **D** = 3 m, **d** = 15 dm

2. Lee y resuelve:

A. El área de un rombo es igual al área de un triángulo de 80 cm de base y 6 dm de altura. Si la diagonal menor mide 30 cm ¿cuánto mide la diagonal mayor?

$$\frac{D \times 30}{2} = \frac{80 \times 60}{2} \rightarrow D \times 30 = 80 \times 60 \rightarrow D = \ldots$$



B. Un lado de un rombo mide 5 cm y sus diagonales miden 8 cm y 6 cm. Calcula primero el área del rombo y después la altura del rombo.

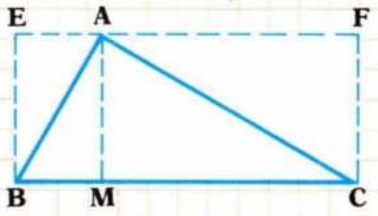
C. El perímetro de un triángulo equilátero mide 0,9 m y la altura mide 25,95 cm. Calcula el área del triángulo.

D. Calcula el área de un triángulo isósceles sabiendo que un cateto mide 8 cm.

3. Lee, dibuja y contesta:

Dibuja un triángulo **ABC** de altura **AM**.

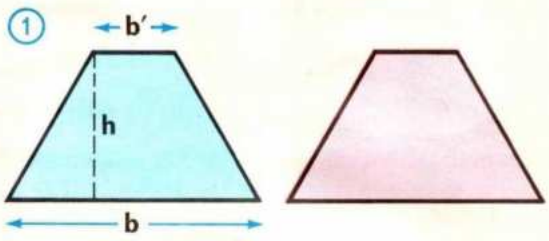
Dibuja también los rectángulos **AMBE** y **AMCF**.

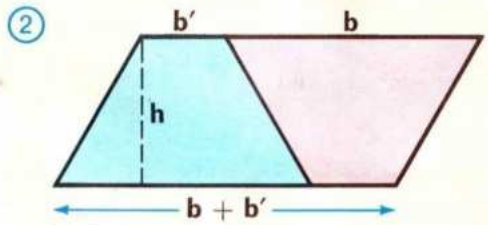


- ¿Qué representa el área del triángulo **AMB** respecto del área del rectángulo **AMBE**?
- ¿Qué representa el área del triángulo **AMC** respecto de la del rectángulo **AMCF**?
- Compara el área del triángulo **ABC** con la del rectángulo **EFCB**.

6. Área del trapecio. Fórmula

Área del trapecio.





$$A = \frac{(b + b') \times h}{2}$$

① Dibuja dos trapecios iguales y colorea uno de azul y otro de rojo.

② Recorta el trapecio rojo y colócalo invertido junto al trapecio azul.

Así resulta un paralelogramo que está formado por dos trapecios iguales.

El área del paralelogramo es $(b + b') \times h$, y el de cada trapecio $\frac{(b + b') \times h}{2}$, es decir:

El área del trapecio es:

$$\frac{\text{(base mayor + base menor)} \times \text{altura}}{2}$$

El área de un trapecio es igual a la mitad del producto de la suma de las bases por la altura.

1. Halla el área de los trapecios cuyas medidas son:

① $b = 6$ m, $b' = 3$ m, $h = 2$ m

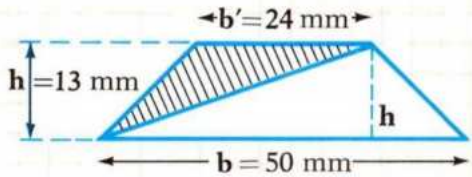
② $b = 8$ dm, $b' = 6$ dm, $h = 32$ cm

③ $b = 15$ dm, $b' = 1{,}2$ m, $h = 0{,}6$ m

④ $b = 18$ cm, $b' = 1$ dm, $h = 6$ cm

2. Observa la figura:

Calcula el área del trapecio sumando las áreas de los dos triángulos en que se ha descompuesto.



3. Lee y completa:

b y **b′** son, respectivamente, las bases mayor y menor de un trapecio y **h** su altura.

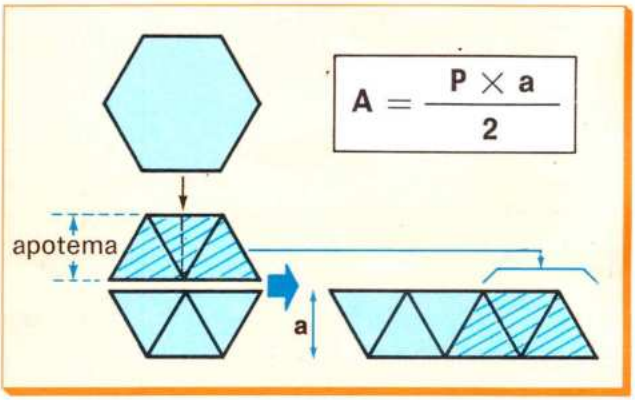
¿Cuáles de las siguientes son fórmulas correctas del área del trapecio?

Compruébalo con los valores $b = 12$ cm, $b' = 8$ cm, $h = 5$ cm.

Completa la tabla escribiendo Sí o NO.

$\frac{b + b'}{2} \times h$	$\frac{(b + b') \times h}{2}$	$(b + b') \times \frac{h}{2}$	$\frac{(b + h) \times b'}{2}$

7. Áreas de polígonos regulares y de polígonos irregulares



$$A = \frac{P \times a}{2}$$

Área de un polígono regular.

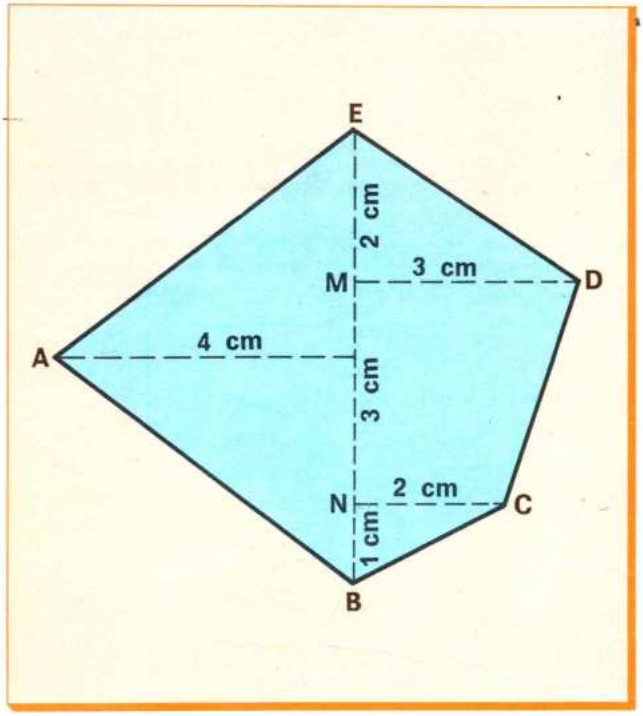
Todo polígono regular se puede descomponer en triángulos. En cada uno de estos triángulos la altura es la apotema del polígono regular.

La figura muestra la transformación de un polígono regular en un paralelogramo que tiene por base el semiperímetro del polígono y por altura la apotema.

Si **P** es el perímetro y **a** la apotema:

$$\text{Área del polígono} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto del perímetro por la apotema.



Área de un polígono irregular.

El área de un polígono irregular se puede hallar descomponiendo el polígono en otras figuras: en triángulos, en rectángulos, en trapecios, etc.

Para hallar su área lo más frecuente es la descomposición en trapecios y triángulos mediante una diagonal y las perpendiculares a ella trazadas por los vértices.

Así, en el pentágono **ABCDE** se han trazado la diagonal **EB** y las perpendiculares a ella desde los vértices **A**, **C** y **D**.

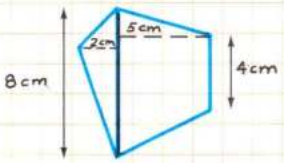
Con los datos de la figura se tienen las siguientes áreas:

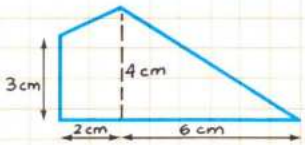
- del triángulo **ABE** $= \dfrac{6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}}{2} = 12 \text{ cm}^2$
- del triángulo **EDM** $= \dfrac{2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}}{2} = 3 \text{ cm}^2$
- del trapecio **MDCN** $= \dfrac{3 \text{ cm} + 2 \text{ cm}}{2} \times 3 \text{ cm} = 7{,}5 \text{ cm}^2$
- del triángulo **NCB** $= \dfrac{1 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}}{2} = 1 \text{ cm}^2$

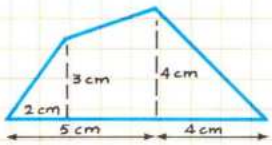
Área del polígono $= 12 + 3 + 7{,}5 + 1 = 23{,}5 \text{ cm}^2$

1. Mide el lado y la apotema y halla el área de estos polígonos regulares.

2. Calcula el área de las siguientes figuras con los datos que figuran en ellas.







CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula el área de los cuadrados cuyos lados miden:

① 3 m ② 4 m ③ 5 m ④ 6 m ⑤ 7 m ⑥ 8 m

2. Calcula el área de los rectángulos cuyas dimensiones son:

① base = 6 m, altura = 8 m ② base = 4 m, altura = 6 m ③ base = 12 m, altura = 2 m ④ base = 24 m, altura = 1 m

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dibuja un hexágono regular de 6 cm de lado. Mide con la regla su apotema y calcula su área.

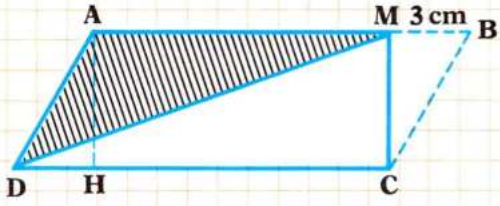
2. Halla el lado de los cuadrados cuyas áreas son:

a) $A = 1.296\ m^2$ b) $A = 1.225\ m^2$ c) $A = 324\ m^2$

3. Dibuja en tu cuaderno varios rectángulos de área 24 cm^2 y halla el perímetro de cada uno.

4. Dibuja en tu cuaderno un rectángulo y un cuadrado equivalente, es decir, que tengan la misma área. Puedes hacerlo en papel cuadriculado.

5. En el paralelogramo **ABCD**, $\overline{AB} = 8$ cm y la altura $\overline{AH} = 4$ cm.



a) Área del triángulo **MDC.**

b) Área del triángulo **MCB** si $\overline{MB} = 3$ cm.

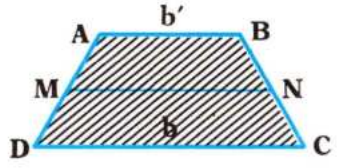
c) Área del triángulo **AMD**.

d) Suma las áreas de los triángulos **AMD** y **MBC** y compara esta suma con el área del triángulo **MDC.**

6. El área de un trapecio se puede expresar utilizando la paralela media.

EJEMPLO RESUELTO

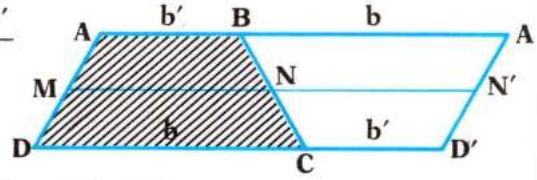
Paralela media de un trapecio es el segmento MN que une los puntos medios de los lados no paralelos.



Prolongando las bases **b** y **b′**, de modo que las longitudes de ambas sean **b + b′**, resulta un paralelogramo, y $\overline{MN'} = b + b'$.

Luego la paralela media $\overline{MN} = \dfrac{\overline{MN'}}{2} = \dfrac{b + b'}{2}$ y el área del trapecio es

$$A = \frac{b + b'}{2} \times h = \overline{MN} \cdot h$$



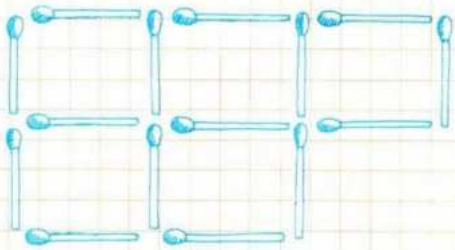
El área de un trapecio es igual a la paralela media por la altura.

Calcula la paralela media y el área del trapecio, sabiendo que $b = 12$ cm, $b' = 8$ cm y $h = 5$ cm.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

JUEGO CON CERILLAS

1. Coloca las quince cerillas como en la figura. Después retira tres cerillas de tal modo que se queden formados tres cuadrados.

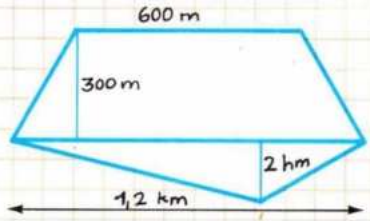


Vuelve a colocar las quince cerillas en la forma que se indica. Retira dos cerillas de modo que queden formados tres cuadrados.

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Un campo tiene la forma y las dimensiones que aparecen en la figura.

Halla la superficie de este campo en hectáreas y en metros cuadrados.

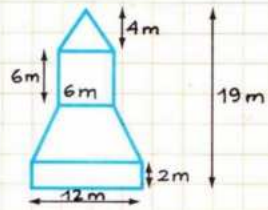


2. Una finca tiene forma rectangular de 12 hm de largo y 60 dam de ancho. Durante una lluvia han caído 85 litros de agua por metro cuadrado. El 45 % del agua caída en la finca se ha filtrado en el suelo y el resto se ha recogido en un pantano.

a) ¿Cuál es el área de la finca en metros cuadrados?
b) ¿Qué cantidad de agua ha caído en la finca?
c) ¿Qué cantidad de agua se ha filtrado?
d) ¿Qué cantidad de agua de la finca ha ido al pantano?

3. La figura indica la forma y las dimensiones de la fachada de un edificio.

¿Cuánto vale pintarlo a 800 ptas. el metro cuadrado?



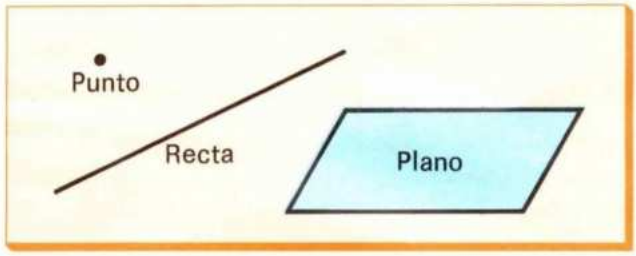
4. Los océanos y mares ocupan el 70 % de la superficie de la Tierra y el 30 % lo ocupan los continentes. La superficie total aproximada de la Tierra es 516 millones de km².

- Calcula la superficie que ocupan los océanos y mares y la que ocupan los continentes.
- Calcula también la superficie aproximada de cada continente sabiendo que el porcentaje que corresponde a cada uno es:

  Asia → 30 %; África → 20 %; América → 28 %; Europa → 7 %; Australia → 5 %; Continente antártico → 10 %.

TEMA 25 PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD EN EL ESPACIO

1. Rectas y planos

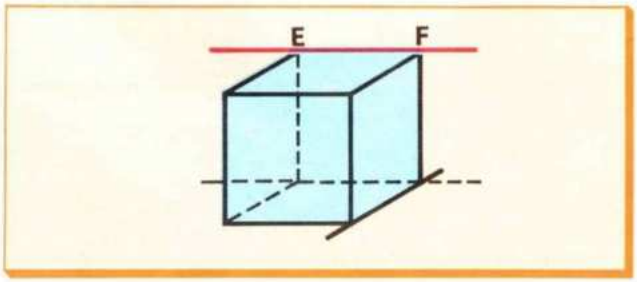


Figuras en el espacio.

Las figuras geométricas más sencillas son la **recta** y el **plano.**

Las figuras geométricas se consideran formadas por puntos. El punto no tiene ninguna dimensión, y por lo tanto, no tiene realidad física.

El lugar donde están contenidas las figuras geométricas se llama **espacio.**



Determinación de la recta.

Dados dos puntos, sabemos que hay una sola recta que pasa por ellos. Esto se expresa brevemente diciendo que: «Dos puntos determinan una recta».

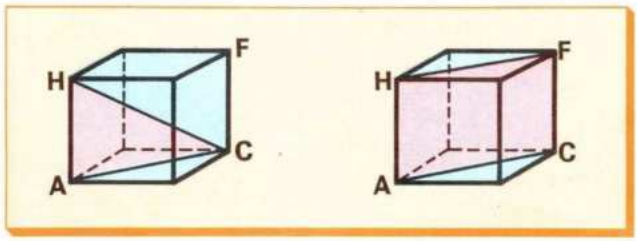
Así dos vértices consecutivos de un cubo, por ejemplo **E** y **F**, determinan una arista y la recta que la contiene.

Propiedad característica del plano.

Cuando los albañiles están enlosando un piso colocan una regla sobre dos puntos que están en un plano horizontal; esto lo consiguen con el nivel de burbuja.

Después el albañil va colocando baldosas de modo que toquen en la regla, y así está seguro de que las baldosas están en un plano horizontal.

El albañil está aplicando una propiedad característica del plano: **«Si una recta tiene dos puntos en un plano toda la recta está contenida en el plano.»**



Determinación del plano.

Los puntos **A**, **H** y **C** no están alineados y determinan un plano (el plano rojo).

Esto significa que por los tres puntos citados pasa un solo plano. Este plano es el mismo que determinan las rectas paralelas **AH** y **CF**.

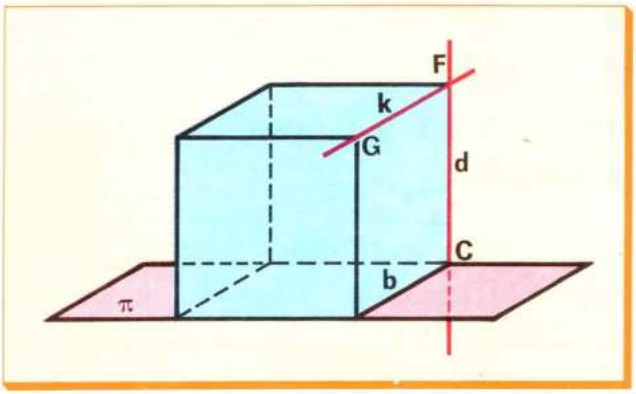
Por dos puntos pasa una sola recta.

Si una recta tiene dos puntos en un plano está toda ella contenida en el plano.

Por tres puntos no alineados pasa un solo plano, o, lo que es lo mismo, tres puntos no alineados determinan un plano.

2. Posiciones de una recta y un plano

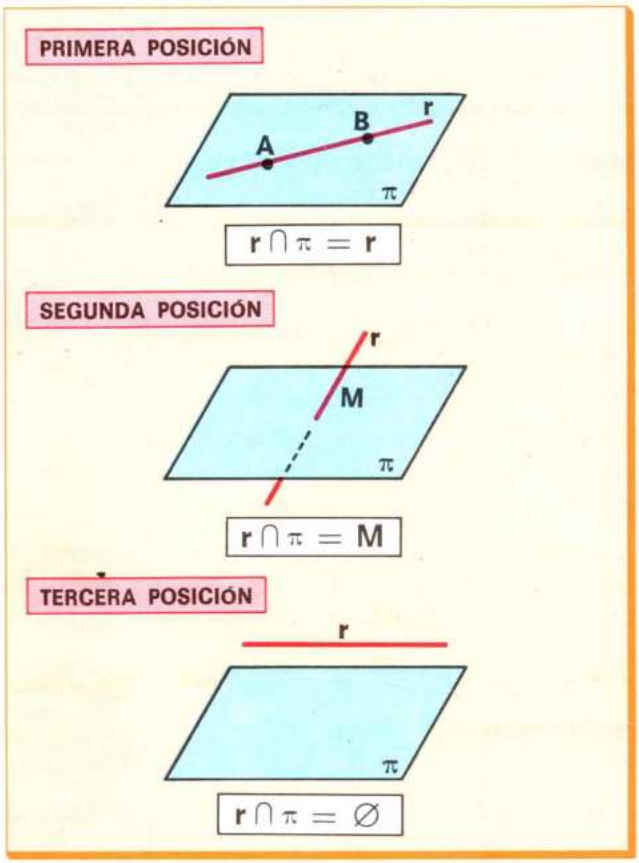
Rectas y planos en el cubo.



Observa el plano π que contiene la cara inferior del cubo.

- La recta **b** está toda situada en el plano π.
- La recta **d** tiene un solo punto común con el plano: el punto **C.**
- El punto **C** de intersección del plano π con la recta **d** se llama **pie** o **traza** de la recta **d** sobre el plano.
- La recta **k** que contiene a la arista **FG** no corta el plano π. Diremos que el plano π y la recta **k** son paralelas.

Posiciones de una recta y un plano.



Acabamos de ver en el cubo que un plano y una recta pueden tener tres posiciones.

PRIMERA POSICIÓN

La recta está contenida en el plano

Esto ocurre cuando la recta tiene dos puntos comunes con el plano.

La recta **r** tiene dos puntos comunes **A** y **B** con el plano, y por eso toda ella está contenida en el plano.

SEGUNDA POSICIÓN

La recta corta al plano

Esto ocurre cuando la recta tiene un solo punto común con el plano.

La recta **r** y el plano π tienen en común el punto **M**.

El punto **M** es el **pie** o **traza** de la recta sobre el plano.

TERCERA POSICIÓN

La recta es paralela al plano

En este caso la recta no tiene ningún punto común con el plano.

La recta **r** es paralela al plano π.

1. Dibuja el plano que forman dos aristas opuestas de un cubo.

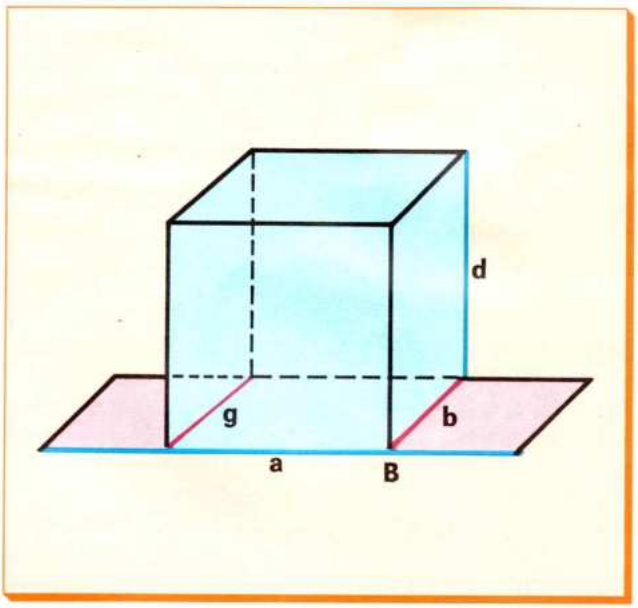
2. Dibuja tres cubos:

a) En el primero colorea un plano y una recta (arista) que estén situados en él.

b) En el segundo cubo colorea un plano y una recta (arista) que se corte con el plano en un punto.

c) En el tercero colorea un plano y una recta (arista) paralela al plano.

3. Posiciones de rectas en el espacio



Posiciones de dos rectas en el cubo.

Cada arista del cubo determina una recta que contiene dicha arista.

En el cubo se observa que:

- Las aristas **g** y **b** están en el mismo plano y no tienen ningún punto común:

  $$g \cap b = \varnothing$$

  Luego **g** y **b** son **rectas paralelas.**

- Las aristas **a** y **b** están en el mismo plano y tienen un punto común **B:**

  $$a \cap b = B$$

  Luego las rectas **a** y **b** son **rectas secantes.**

- Las aristas **a** y **d** no están en el mismo plano, y por tanto no tienen ningún punto común:

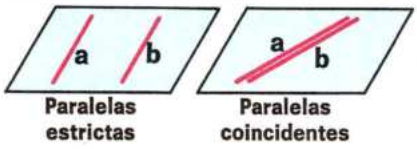
  $$a \cap b = \varnothing$$

  Se dice que son rectas que **se cruzan.**

Posiciones de dos rectas en el espacio.

Dos rectas **a** y **b** del espacio pueden ser: **paralelas, secantes** y **rectas que se cruzan.**

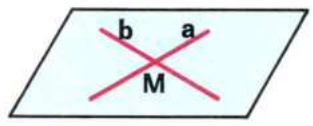
RECTAS PARALELAS



Rectas paralelas son dos rectas que están en el mismo plano y que no tienen ningún punto común o coinciden.

$$a \cap b = \varnothing \rightarrow a // b$$

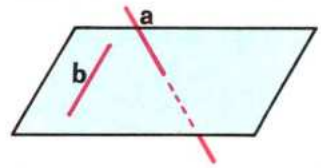
RECTAS SECANTES



Rectas secantes son dos rectas que están en el mismo plano y tienen un solo punto común:

$a \cap b = M \rightarrow$ **a y b secantes**

RECTAS QUE SE CRUZAN

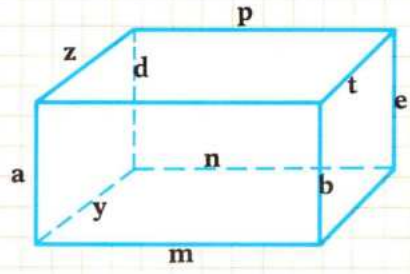


Rectas que se cruzan son dos rectas que están en distinto plano.

a y **b** son rectas que **se cruzan**

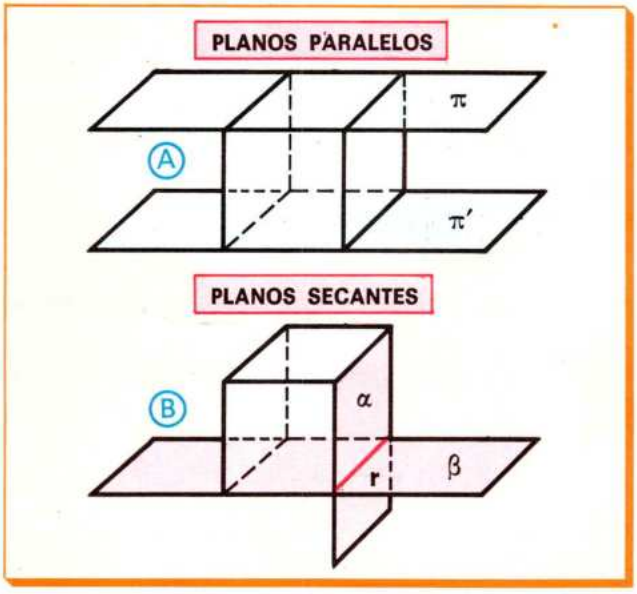
1. Observa el ortoedro de la figura:

a) Indica dos pares de rectas paralelas.
b) Indica dos pares de rectas secantes.
c) Indica dos pares de rectas que se crucen.
d) ¿Cómo son las rectas **m** y **e**?
e) ¿Cómo son las rectas **z** y **t**?
f) ¿Cómo son las rectas **z** y **b**?



2. Dibuja un cubo y colorea de azul dos aristas paralelas y de rojo dos aristas que se crucen.

4. Posiciones de dos planos en el espacio



Planos en el cubo.

Cada cara de un cubo determina un plano que contiene dicha cara.

- En el cubo (A) se observa que los planos π y π', coloreados de azul, que contienen dos caras opuestas, no tienen ningún punto común:

$$\pi \cap \pi' = \varnothing$$

Se dice que son **planos paralelos.**

- En el cubo (B) se observa que los planos α y β, coloreados de rojo, que contienen dos caras consecutivas del cubo, tienen en común la recta **r:**

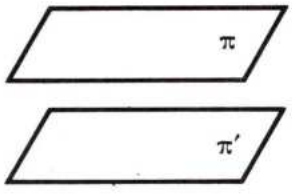
$$\alpha \cap \beta = r$$

Se dice que son **planos secantes.**

Posiciones de dos planos en el espacio.

Dos planos π y π' pueden ser **paralelos** y **secantes.** Los paralelos pueden ser: **estrictamente paralelos o coincidentes.**

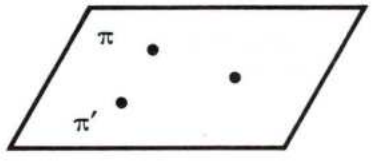
PLANOS PARALELOS



Planos estrictamente paralelos

Cuando no tienen ningún punto común:

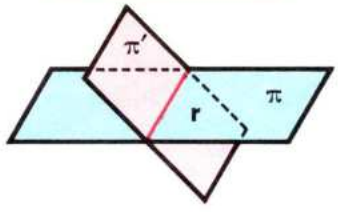
$$\pi \cap \pi' = \varnothing \rightarrow \pi // \pi'$$



Planos coincidentes

Cuando tienen en común tres o más puntos que no se encuentran en la misma recta. Entonces π y π' son el mismo plano o **planos coincidentes.**

PLANOS SECANTES



Cuando tienen en común una recta:

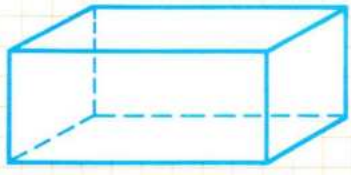
$\pi \cap \pi' = r \rightarrow \pi$ y π' son **planos secantes.**

Planos paralelos son dos planos que no tienen ningún punto común o que coinciden.
Planos secantes son dos planos que tienen en común una recta.

1. En un ortoedro colorea:

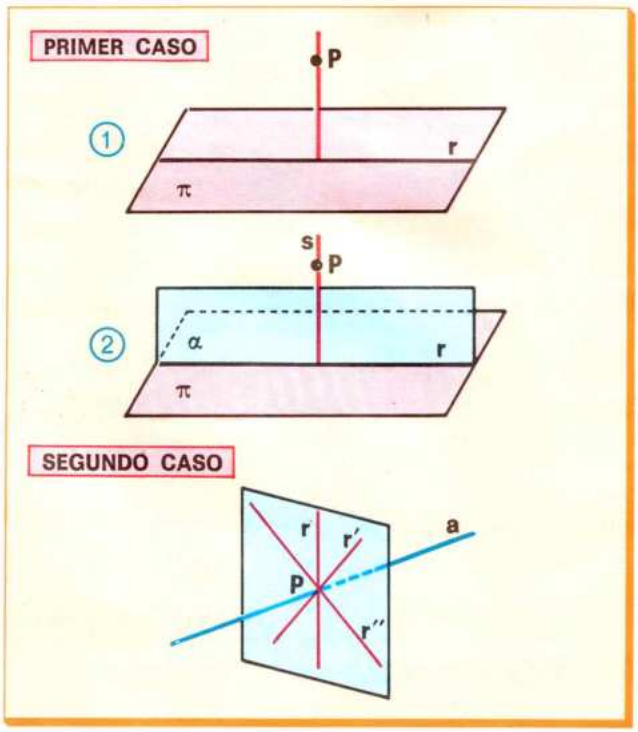
a) Dos planos paralelos.

b) Dos planos secantes.



5. Rectas perpendiculares. Recta y plano perpendiculares

Rectas perpendiculares en el espacio.



En geometría plana se vio que por un punto sólo se puede trazar una perpendicular a una recta dada.

Para averiguar qué ocurre en la geometría del espacio distinguimos dos casos:

PRIMER CASO

Cuando se traza la perpendicular a una recta desde un punto exterior a dicha recta

(1) Sea **r** la recta del plano π y **P** un punto exterior a la recta **r.**

(2) La recta **r** y el punto **P** determinan un plano α, y en el plano α sólo se puede trazar una perpendicular **s** a la recta **r.**

SEGUNDO CASO

Cuando se traza la perpendicular a una recta desde un punto de dicha recta

Sea **a** la recta y **P** un punto de ella: $P \in a$.

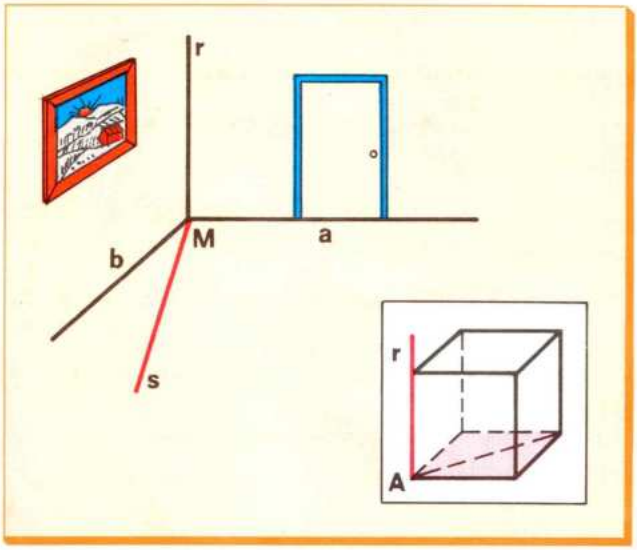
Observa que por el punto **P** se pueden trazar tantas perpendiculares a la recta **a** como se quiera:

$$r \perp a;\ r' \perp a;\ r'' \perp a$$

Por un punto exterior a una recta se puede trazar una sola perpendicular a dicha recta.

Por un punto de una recta se pueden trazar infinitas perpendiculares a dicha recta.

Recta y plano perpendiculares.



Observa la habitación de la figura.

Designemos por **r** la intersección de dos paredes laterales. Designemos por **a** y **b** las intersecciones de las paredes laterales con el suelo.

La recta **r** es perpendicular a las rectas **a** y **b**.

Por otra parte, si por el punto **M** se traza otra recta **s**, también es **r** perpendicular a la recta **s**.

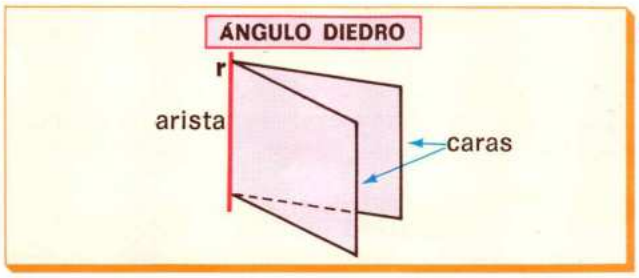
Se observa que la recta **r** es perpendicular a cualquier otra recta del plano (suelo) que pasa por **M**.

Lo mismo se puede ver en el cubo, en el que la recta **r** es perpendicular al plano (cara coloreada) y también es perpendicular a las rectas que pasan por el punto **A** (pie de la recta **r**).

Si una recta es perpendicular a otras dos rectas de un plano que pasen por su pie, entonces es perpendicular a cualquier otra recta del plano que pase por su pie y, por tanto, perpendicular al plano.

6. Ángulo diedro. Rectilíneo de un diedro

Ángulo diedro.

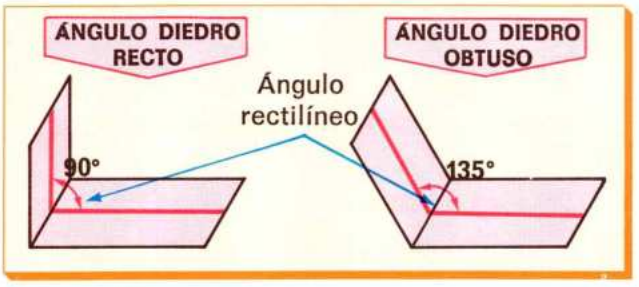


Observa en la figura dos semiplanos que tienen común una recta **r**.

La porción de espacio limitada por los dos semiplanos se llama **ángulo diedro.**

- Cada semiplano se llama **cara** del ángulo diedro.
- La recta de intersección de las caras del diedro se llama **arista.**

Rectilíneo de un diedro.

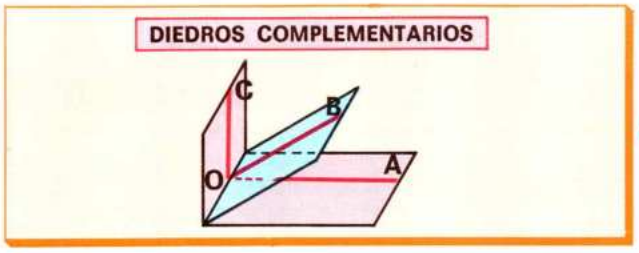


En este diedro se han trazado dos perpendiculares a la arista en el mismo punto, situadas cada una de ellas en una cara.

El ángulo formado por estas perpendiculares se llama **ángulo rectilíneo del diedro.**

La medida de un ángulo diedro es la misma que la de su rectilíneo; así, si el rectilíneo es un ángulo recto, el diedro es también recto.

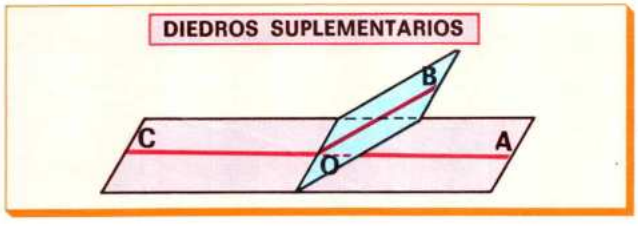
Diedros complementarios.



Dos diedros se dicen **complementarios** si sus rectilíneos son ángulos complementarios.

En la figura, los dos diedros son complementarios, pues sus rectilíneos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ son ángulos complementarios.

Diedros suplementarios.



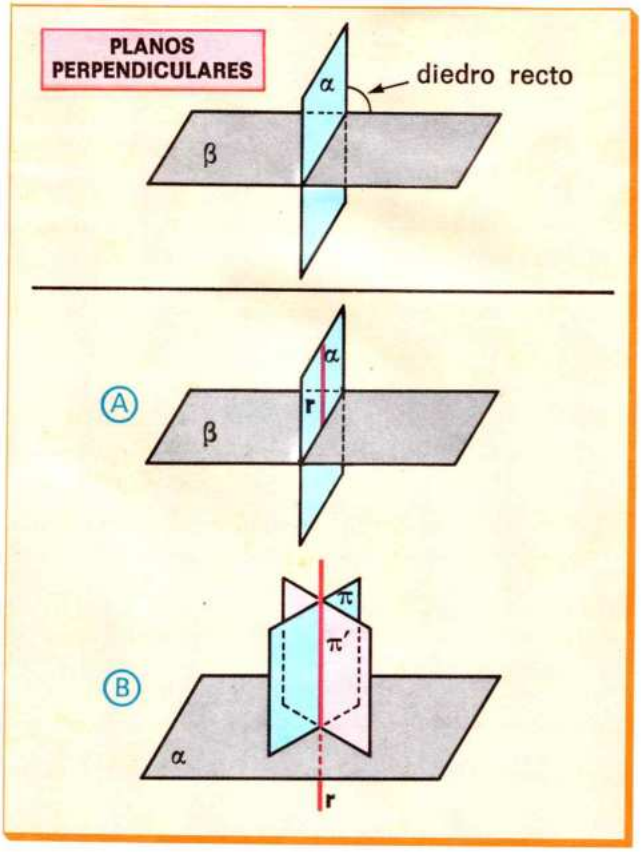
Dos diedros se dicen suplementarios si sus rectilíneos son ángulos suplementarios.

En la figura los diedros son suplementarios, pues sus rectilíneos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ son ángulos suplementarios.

Ángulo diedro es la porción de espacio limitada por dos semiplanos.
Rectilíneo de un diedro es el ángulo formado por dos perpendiculares a las aristas situadas una en cada cara.
La medida de un ángulo diedro es la misma que la de su rectilíneo.
Diedros complementarios son dos diedros cuyos rectilíneos son ángulos complementarios.
Diedros suplementarios son dos diedros cuyos rectilíneos son ángulos suplementarios.

7. Planos perpendiculares: Propiedades

Planos perpendiculares.



Observa que los planos secantes α y β se cortan formando cuatro diedros rectos. Por esta razón se dice que los planos α y β son **planos perpendiculares.**

Propiedades de los planos perpendiculares

- Si dos planos son perpendiculares, toda recta de uno de ellos (como la recta **r**) que sea perpendicular a la arista es perpendicular al otro plano, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha \\ r \perp \text{arista} \end{array}\right\} \longrightarrow r \perp \beta$$

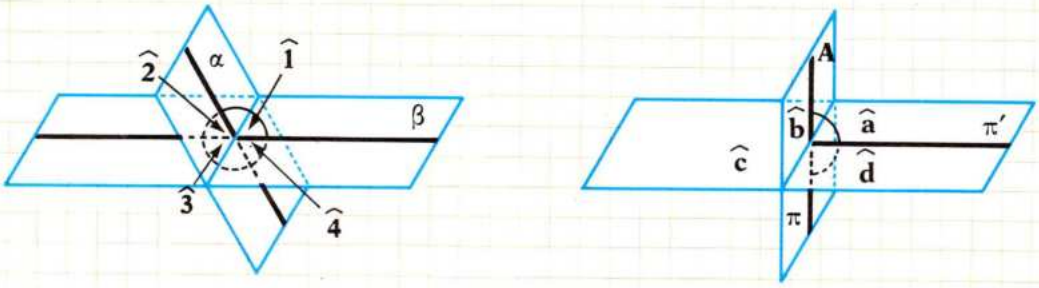
- Si un plano α es perpendicular a una recta **r**, entonces es perpendicular a cualquier plano que contenga dicha recta.

  Así el plano α es perpendicular a la recta **r** y también es perpendicular a los planos π y π' que contienen la recta **r.**

$$r \perp \alpha \left\{\begin{array}{l} \longrightarrow \pi' \perp \alpha \\ \longrightarrow \pi \perp \alpha \end{array}\right.$$

Dos planos son perpendiculares si son planos secantes y forman cuatro diedros rectos.

1. Observa cuatro diedros que forman los planos α y β y los planos π y π' al cortarse:



- Dibuja los cuatro ángulos que forman los rectilíneos en el caso de los planos α y β.
- Dibuja los cuatro ángulos que forman los rectilíneos en los planos π y π'.
- Los diedros $\widehat{1}$ y $\widehat{3}$, así como los diedros $\widehat{2}$ y $\widehat{4}$, se llaman opuestos por la arista. ¿Cómo se llaman los rectilíneos correspondientes a estos pares de diedros? ¿Cómo son los rectilíneos en el caso de los planos π y π'?

2. Lee atentamente y contesta:

Cuando una puerta se va abriendo, va tomando diversas posiciones y cada posición determina un plano. Todos estos planos son perpendiculares a otro. ¿A cuál?

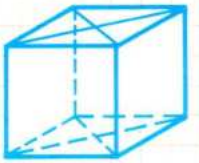
Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dibuja cuatro cubos y señala en ellos:

a) Dos planos paralelos.
b) Dos planos perpendiculares.
c) Una recta y un plano paralelos.
d) Una recta y un plano perpendiculares.

2. Observa dos planos diagonales de un cubo.

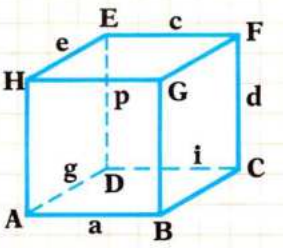


a) ¿Qué ángulos forman las diagonales de las caras?
b) ¿Cómo son los ángulos diedros que se forman al cortarse estos planos?

3. Coloca una escuadra entre dos paredes de la clase, como si la escuadra fuera un rectilíneo del ángulo diedro que forman las paredes. ¿Cuánto mide este diedro?

¿Qué puedes decir de sus caras?

4. Considera el cubo de la figura.



a) ¿Qué aristas son paralelas a la arista **a**?
b) ¿Cuántas caras paralelas hay a la cara **ABCD**? Nómbralas.
c) Nombra dos caras secantes.
d) Nombra tres pares de aristas que se crucen.
e) Nombra tres pares de aristas que se corten.
f) ¿Cuántos planos diagonales hay en el cubo?

5. Observa las caras y las aristas que forman las paredes de la clase.

Indica dos aristas que sean paralelas, dos aristas que se corten y otras dos que sean perpendiculares.

6. Dibuja un plano y una recta **r** en los casos siguientes:

a) $\mathbf{r} // \pi$ b) $\mathbf{r} \subset \pi$ c) $\mathbf{r} \cap \pi = \mathbf{M}$

7. Dos rectas paralelas determinan un plano. Indica un plano en tu clase que pase por dos rectas paralelas.

8. Dibuja un diedro recto, un diedro agudo y un diedro obtuso.

9. Dibuja:

a) Dos diedros complementarios.
b) Dos diedros suplementarios.
c) Dos diedros adyacentes.

10. ¿Cuántos planos perpendiculares se pueden trazar a la recta **r** en los siguientes casos?

a) Que pasen por el punto $\mathbf{P} \notin \mathbf{r}$. b) Que pasen por el punto $\mathbf{H} \in \mathbf{r}$.

Ilustra cada contestación con una figura.

CUADRADOS PERFECTOS DE LOS 200 PRIMEROS NÚMEROS NATURALES

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
1	1	41	1.681	81	6.561	121	14.641	161	25.921
2	4	42	1.764	82	6.724	122	14.884	162	26.244
3	9	43	1.849	83	6.889	123	15.129	163	26.569
4	16	44	1.936	84	7.056	124	15.376	164	26.896
5	25	45	2.025	85	7.225	125	15.625	165	27.225
6	36	46	2.116	86	7.396	126	15.876	166	27.556
7	49	47	2.209	87	7.569	127	16.129	167	27.889
8	64	48	2.304	88	7.744	128	16.384	168	28.224
9	81	49	2.401	89	7.921	129	16.641	169	28.561
10	100	50	2.500	90	8.100	130	16.900	170	28.900
11	121	51	2.601	91	8.281	131	17.161	171	29.241
12	144	52	2.704	92	8.464	132	17.424	172	29.584
13	169	53	2.809	93	8.649	133	17.689	173	29.929
14	196	54	2.916	94	8.836	134	17.956	174	30.276
15	225	55	3.025	95	9.025	135	18.225	175	30.625
16	256	56	3.136	96	9.216	136	18.496	176	30.976
17	289	57	3.249	97	9.409	137	18.769	177	31.329
18	324	58	3.364	98	9.604	138	19.044	178	31.684
19	361	59	3.481	99	9.801	139	19.321	179	32.041
20	400	60	3.600	100	10.000	140	19.600	180	32.400
21	441	61	3.721	101	10.201	141	19.881	181	32.761
22	484	62	3.844	102	10.404	142	20.164	182	33.124
23	529	63	3.969	103	10.609	143	20.449	183	33.489
24	576	64	4.096	104	10.816	144	20.736	184	33.856
25	625	65	4.225	105	11.025	145	21.025	185	34.225
26	676	66	4.356	106	11.236	146	21.316	186	34.596
27	729	67	4.489	107	11.449	147	21.609	187	34.969
28	784	68	4.624	108	11.664	148	21.904	188	35.344
29	841	69	4.761	109	11.881	149	22.201	189	35.721
30	900	70	4.900	110	12.100	150	22.500	190	36.100
31	961	71	5.041	111	12.321	151	22.801	191	36.481
32	1.024	72	5.184	112	12.544	152	23.104	192	36.864
33	1.089	73	5.329	113	12.769	153	23.409	193	37.249
34	1.156	74	5.476	114	12.996	154	23.716	194	37.636
35	1.225	75	5.625	115	13.225	155	24.025	195	38.025
36	1.296	76	5.776	116	13.456	156	24.336	196	38.416
37	1.369	77	5.929	117	13.689	157	24.649	197	38.809
38	1.444	78	6.084	118	13.924	158	24.964	198	39.204
39	1.521	79	6.241	119	14.161	159	25.281	199	39.601
40	1.600	80	6.400	120	14.400	160	25.600	200	40.000

MATEMÁTICAS 6

EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA

El material didáctico de Educación General Básica ha sido creado en el Departamento de Investigaciones Educativas de Santillana, S. A. bajo la dirección de **Antonio Ramos**

El material de MATEMATICAS para el sexto curso ha sido programado y elaborado por el siguiente equipo **José Gil**
Carmen Vázquez
Jaime Mascaró

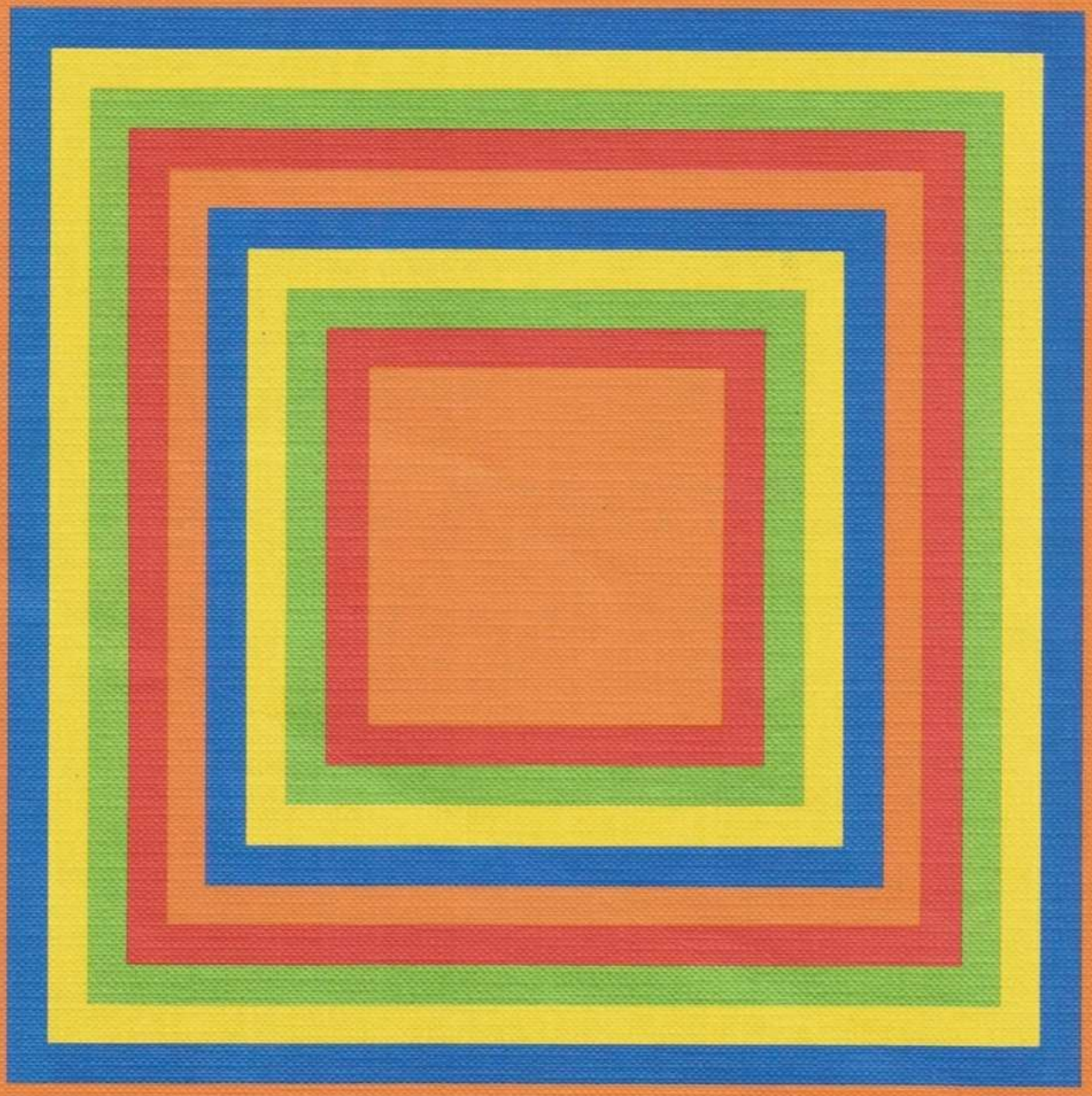
Dirección editorial **Julián Abad**

Ilustraciones **Antonio Aragüez**
Rafael Ortega
José Valera
Carlos Aguilera

santillana

9 788429 420739

EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA



0-2073-1